問題コーナー

第 12 回

川越 美規

C

2005年 6月10日出題
7月10日締切
8月24日解説

A 君と B 君がゲームをしています. ルールは以下の通りです.

- 1 以上 n 以下の整数を交互にひとつずつ, 順に書いていって一つの数列を作る.
- それまでにできた数列の, 連続する何項か (一項でもよい) の数の和となってしまうような数は書くことができない.
- 書ける整数がなくなったら負け.

$n = 2008$ で A 君が先手のときにどちらに必勝法があるでしょうか?

補足

たとえば $n = 5$ で A 君が先手のときに $4 \to 2 \to 1 \to 5$ と順番に選んだとすると, 1 から 5 の全てがこの数列の一部の和になっているので次に出す番の A 君が負けになります.

解説

こんにちは, 第 12 回問題コーナー担当者の川越です. 問題に取り組んでくれた皆様, ありがとうございました.

さっそく, 今回の問題の解答にうつりたいと思います.

◦○◯ 解答例（Σ 君の解答より）

先手を A 君として n が奇数、偶数の場合を考える。

（1）n が奇数の時

一番最後に数を書いた人が勝ちとなるので, A 君が最善手を尽くすには, 「2 項以上の数の和によって書けなくなる整数の数」(これを X とする) が $0, 2, 4, \ldots, 2m$, つまり偶数個となるようにすればいい.

例えば, X が 0 個になるようにするには, まず先手で一番大きい数である n を書けばよい. すると次の番の B 君は, どの数を書いても 2 項の和が n 以上

になってしまうので, X は 0 個のままである. そして次の番の A 君は $n-1$ を書くことによって次の B 君がどんな数を書いても X は 0 個である. (前に B 君が $n-1$ を書いていた場合, $n-2$ を書く. これでも結果は変わらない) これを繰り返す事により X は 0 個のまま, 最後の数まで書くことが出来る. そして最後は A 君の番なので彼の勝ちとなる。

よって n が奇数の時, 先手は書ける数の内で一番大きい数を書く事によって勝つことが出来る.

（2）n が偶数の時

A 君が勝つには奇数の場合とは逆に X が $1, 3, 5, \ldots, 2m+1$, つまり奇数個となるようにする必要があるが, A 君がどんな数を書いても, B 君が書ける数の内で一番大きい数を書く事によって X の数は 0 個のままとなってしまうので, 後手必勝である.

よって 2008 は偶数なので後手の B 君に必勝法がある.

「書くことのできる数字のうち最大のものを書く」という方法に気付けば簡単に解くことができたようで, 他の正解者の方もこの方針で解いていました.

今回のような問題だと, 必勝法を考えるのに決まった手順などはありません. いろいろな例を考えて, 頭の体操として楽しんでもらえれば良かったかな, と思います. 興味を持った方は 1 から n ではなく, $-n$ から n にするとどうなるかなど考えてみてください.

感想欄より

意外にあっさり, 解けました.

もっと規則がありそうな気がするので不安です.

最初は「フィボナッチ数列のときだけ先手必勝」などのもっと複雑な規則性を予想していたので, 難しく考えていました. しかし、実験をしてみると交互に先手必勝になったので, 考え直してみると「常に書ける最大の数を書く」と

いう非常に単順な戦略で (必勝側が) 勝てるということが分かり,「なぁんだ」となりました.

規則に気付いてしまえばすぐなので,「これであってるのか!?」と不安になったかもしれませんね. 逆に, 難しく考えてしまうとなかなか必勝法にたどり着けなかったかもしれません.

1 から n の自然数をすべて書くということを考えたら一気に解けた. B 君の作戦とルールの関係を考えるのが面白かった.

ありがとうございます. この手のゲームは自分で考えることもできると思うので, ぜひ他のゲームも必勝法を考えてみてください.

(かわごえ みのり
東京大学理学部化学科 3 年)