

n を正整数とする. $n \times n$ のマス目に将棋の角行の駒を置いて, 駒がないすべてのマス目が, それぞれいずれかの駒の利き筋に入っているようにしたい. 置かなければならない駒の最小個数を求めよ. ただし, あるマス目がある駒の利き筋に入っているとは, 駒を 1 回の移動でそのマス目に動かせることをいう.
(出題: 近藤宏樹, 担当: 清水俊宏)

解説

第 8 回の問題を担当した清水です. 今回の問題のように, 「 n の最小個数を求めよ」という形式で問われている問題に解答する場合は, 最小個数 k を具体的に提示した後, k 個の場合にうまく置けば条件をみたすこと, および $k-1$ 個以下ではどのように置いても条件をみたさないことを示さなくてはなりません. 一例を示すだけである前者の議論は容易に想像できますが, 厳密な証明を必要とする後者は敬遠される傾向にあり, こういった問題に慣れていない人はこちらをおろそかにしてしまうことが多いようです.

今回の問題の最小個数は n となります. 条件 [すべてのマスが利き筋に入っている] をみたす n 個の配置を見つけるのは比較的容易です. 問題は $n-1$ 個以下ではどのように置いても条件をみたさないことの証明です.

問題を考えるにあたって, 飛車を置く場合に置き換えて考えてみるといいでしょう.

$m \times n$ の長方形のマス目に飛車を置く場合を考えてみましょう. この場合, 少なくとも $\min\{m, n\}$ 枚の飛車を置かなければ, どの飛車の利き筋にも入らないマスができてしまいます. その理由は, $\min\{m, n\} - 1$ 枚以下であれば飛車が 1 枚もない行および飛車が 1 枚もない列ができてしまうので, これらの交点はどの飛車の利き筋にもならないからです.

角の場合はどうでしょうか？盤を 45° 回転させれば飛車と同じような動きをするとみることができますが、その場合の動く範囲は長方形にはなりません。

そこで、その中から長方形を取り出して考えればよいわけです。

では、解答に入りましょう。

・○○○ 解答 (武田 久輝君のアイデアによる)

$n \times n$ の将棋盤を左上が黒になるような市松模様 (黒に隣接するマスはすべて白、白に隣接するマスはすべて黒となるような塗り方) で塗り分ける。また、上から i 行目、左から j 列目のマスを (i, j) と表す。

このとき、角行は同じ色のマス上にしか移動できないことに注意する。

以下、求める最小個数は n であることを示す。まず、 n 個の場合は、中央の行 (n が偶数のときは第 $n/2$ 行、奇数のときは第 $(n+1)/2$ 行) のすべてのマスに角行を置けばどのマスも利き筋に入る。

次に $n-1$ 個以下では必ず利き筋にないマスが出てくることを示す。これは、すべてのマスを利き筋に入れるためには n 個以上の角行を置かなくてはならないことと同値である。

(i) n が偶数のとき、 $n = 2m$ とおく。

4 つのマス $(1, m+1), (2m, m), (m, 2m), (m+1, 1)$ の中心を結ぶ長方形を R_1 とする。黒いマスのうち、 R_1 の内部と共有点を持つようなマス (下左図 $n=8$ の場合は 0 が書かれたマス) を取り出す。

盤を 45° 回転させるとこれらのマスは $(m+1) \times m$ の長方形とみることができ、この長方形を R'_1 としよう。角行はこの長方形を飛車と同じ動き (行、列に平行に動く) をする。よって、この長方形のすべてのマスを角行の利き筋に入れるには黒いマスに少なくとも m 個の角行を置かなくてはならない。なぜなら、そうでなければ、角行が一枚もない行と列 (およびその延長) が R'_1 に存在し、それらの交点 (R'_1 内にある) は利き筋にない。

同様に、 $(1, m), (m, 1), (2m, m+1), (m+1, 2m)$ の中心を結ぶ長方形と共有点をもつ白いマス (図の 1 のマス) について考える。これは、 $(m+1) \times m$ の長方形とみることができ、同様に m 個の角行を黒いマスに置かなくてはならない。よって、合計 $m+m=2m=n$ 枚の角行を置かなくてはならない。

(ii) n が奇数のとき、 $n = 2m+1$ とおく。同様に、 $(1, m), (m, 1), (2m+1, m+$

2), $(m+2, 2m+1)$ の中心を結ぶ長方形と共有点をもつ黒いマスの集合を $m \times (m+2)$ の長方形とみて, $(1, m+1), (m+1, 1), (2m+1, m+1), (m+1, 2m+1)$ の中心を結ぶ長方形と共有点をもつ白いマスの集合を $(m+1) \times (m+1)$ の長方形とみると, 合計 $m + (m+1) = 2m+1 = n$ 枚の角行を置かなくてはならない. (下右図の $n=9$) の場合を参照.

			1	0				
		1	0	1	0			
	1	0	1	0	1	0		
1	0	1	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	0	1	
	0	1	0	1	0	1		
		0	1	0	1			
			0	1				

			0	1				
		0	1	0	1			
	0	1	0	1	0	1		
0	1	0	1	0	1	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	1
	1	0	1	0	1	0	1	0
		1	0	1	0	1	0	
			1	0	1	0		
				1	0			

よって, 少なくとも n 枚の角行を置かなければ, 利き筋にないマスができてしまう. 以上より, 最小個数は n であることが示された.

5 通の答案 (重複を含む) が送られ, 正解者は 4 人でした. どの人も厳密な議論がなされていました.

(しみず としひろ)
(早稲田大学理工学部数理科学科 3 年)