

n を 2 以上の整数とする．いまここに重さのわからない n 個のおもりがある．ただしどの 2 個のおもりも同じ重さではないとする．A 君と B 君は，天秤をつかってこれら n 個のおもりの重さの順序を決定しなければならない．天秤の左右の皿には一つずつしかおもりを乗せることはできない．天秤の両皿におもりを乗せてどちらが重いか見ることを「操作」ということにする．まずはじめ B 君がこの作業をしていたが，すべての順序を決定する前に A 君に交代することになった．このときに，B 君の調べたすべての操作の結果の記録（各々の操作でどの 2 個のおもりを比べ，どちらが重かったか）が A 君に渡された．A 君がこれらの情報から， n 個のおもりの重さの順序として考えられるものが何通りあるか数えてみたところ，それは m 通りだった．さらに，次の条件が成り立たないことがわかった：うまくおもりを 2 つのグループ X, Y に分けると， X に属するどのおもりも， Y に属するどのおもりよりも重いことが，B 君の残した記録のみからわかる． k を， $m \leq 2^k$ をみたす最小の整数とする．A 君がうまい方法をとれば必ず k 回以内の操作で重さの順序を特定できるといえるか．いえる場合はその証明を，いえない場合はその反例とそれが反例になっていることの証明を示せ．

 解説

こんにちは，第 5 回担当の栗林です．まず最初に，度々の問題訂正申し訳ありませんでした．2 回目の訂正は無くても問題としては成り立つものだったのですが，大幅に簡単になってしまうので訂正させてもらいました．証明すべきか，反例を示すべきか悩んだ人も多いと思いますが，結論としては反例が存在します．まずは，訂正前の場合について解説しましょう．以下， $U > V$ でおもり U がおもり V より重いことをあらわすことにします．

何も情報の与えられていない 3 個のおもりの順序を特定するには 3 回の操作が必要。3N 個のおもりを 3 個ずつ N 個のグループに分けて、それらを $A_1, \dots, A_N$ とし、B 君は $i < j$ のとき、 $(A_i \text{ の任意のおもり}) < (A_j \text{ の任意のおもり})$ であることを調べたとする。違うグループに属するおもりの大小関係はすでに特定されているので、A 君は同じグループ内のおもりのみ比べる。よっておもりの順序を完全に特定するには 3N 回以上の操作が必要。一方、おもりの順序として考えられるのは 6^N 通り。N を十分大きくすれば $6^N < 2^{3N-1} = 8^N/2$ となるのでこれは反例である。

この方法を応用したのが次の解答です。

○○○ 解答例 1 (tos 君の解答より)

$n = 3N + 1$ (N は十分大きな整数) とし、おもりを

$$X_{i,j}, Y (i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, 3)$$

として、B 君は、

$$X_{i_1, j_1} > X_{i_2, j_2} (i_1 > i_2)$$

を調べたとする。

重さの順序は、 $(3N + 1)6^N$ 通りである。

運が悪く、

$$Y > X_{i,j}$$

であったとき、Y を含む操作は $X_{i,j}$ 同士の順番に情報を与えない。

また、運が悪いとき、 $X_{i,1}, X_{i,2}, X_{i,3}$ の中での重さの順序を決めるのには、 $\{X_{i,1}, X_{i,2}\}, \{X_{i,1}, X_{i,3}\}, \{X_{i,2}, X_{i,3}\}$ の全てについて、順序を調べる必要がある。

このとき、必要な操作が、重複していないから、3N 回は操作が必要。

N を十分に大きくとると、

$$(3N + 1)6^N \leq 2^{3N-1}$$

とできるので、 $k = 3N - 1$ とすれば、これは反例であり、A 君が必ずしも k 回以内の操作で順序を特定できないことが示された。

問題の条件を満たすようにするために全く比較されていないおもりを一つとってきたわけですね。これと同じ方法を使えば、ある定数 c が存在して、A 君が必ず $k + c$ 回以内の操作で重さの順序を特定できるということもないことがわかります。

この方法で構成した反例はおもりの個数がかなり多くなってしましますが、少ない個数のおもりで反例を構成した次のような解答もありました。

・○○○ 解答例 2 (瀧塚 寧孝君の解答より (反例のみ抜粋))

6 個のおもり $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2$ があり, B 君は b_1, b_2, b_3, b_4 から任意の 2 個を選ぶ ${}_4C_2$ 通り全てについて操作を行い, c_1, c_2 から任意の任意の 2 個を選ぶ ${}_2C_2$ 通り全てについて操作を行ったが, それ以外の操作は行わなかった. このとき関係 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ と関係 $c_1 < c_2$ が得られたとする. これらから考えられるおもりの順序は ${}_5H_2 = 15$ 通りであり, また $2^3 < 15 < 2^4$ であるから $k = 4$ である.

これが反例になっていることはさまざまな方法で示せると思うのでここでは詳細は略します. 例えば, 一回目の操作でどの二つを比較するかで場合分けして調べることによって示すことが出来ます.

ちなみに, おもりの個数が一番少ない反例は a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 があり, B 君が $a_i < a_j$ ($i+1 < j$ のとき) を調べたときです. おもりの順序として考えられるのは 8 通りで, どの二つを比べたとしても運が悪いときは 5 通り以上の可能性が残ってしまうので, 3 回の操作では必ずしも特定できません. 4 個以下のおもりで反例が存在しないことは, しらみつぶしにより証明できます.

ちなみに, おもりの個数が多いければ B 君が何もしない場合でも反例が存在すると予想していますがこれはまだ証明できていません.

最後になってしまいましたが, 実はこの問題, 僕は元ネタを提供しただけで, 実質的な作問者は松本雄也さんでした. 上の解答も松本さんによるものです. 松本さんどうもありがとうございます.

■ 感想欄より

自信をもって回答しましたが, こんな作りこまれた問題で反例が出るとは, とても思えません. 杞憂であればうれしいんですが……

問題を訂正して条件を付け加えたことで, 反例が存在することに余計な不安を抱かせてしまったかも知れませんね. すいません. 問題文はわりと複雑に見えます

が、内容自体は割と自然なものだと思います。この問題の元は、「7回天秤を使って5つのおもりの順序を決定せよ」というよくあるタイプの問題でした。

こういった問題を考えたり、挑戦したりするのは初めてなので自信がないですが、もっと力をつけていろいろな問題を解いてみたいと思います。

こういう組み合わせの問題は学校や受験ではほとんど扱われることがないので、最初はいろいろ戸惑うこともあるかもしれませんが、しかしこういう問題は考えれば考えるほど力がつくので、ぜひ楽しみながらさまざまな問題にチャレンジしてってください。

(くりばやしつかさ)
(東京大学理科一類1年)