$N \times N$ のマス目の各辺にマッチ棒が置かれている。

1 つのマスを指定し、そのマスの辺上にあるマッチ棒のうちちょうど 3 本を取り去る、という操作が許されているものとする。この操作を繰り返してマッチ棒をすべて取り去ることが可能であるような正の整数 N をすべて求めよ。

解説

こんにちは、第 4 回担当の足立です。解説の発表が大幅に遅れてしまい、たいへん申し訳ありません。すべてマッチ棒が取り除ける条件を絞り込んでいけば、自然と解答が得られると思います。

では解答にうつりましょう。

○○○ 解答例（りんご君の解答より）

（上から） i 行目、（左から） j 列目のマスをマス (i, j) と書く。

また、あるマスについて、そのマスの左辺以外、右辺以外、上辺以外、下辺以外のマッチ棒を取り除く作業を、それぞれ作業 L, R, U, D と呼ぶことにする。

補題 1 マッチ棒を全て取り除くことができるならば、 $N \equiv 0, 2 \pmod{3}$ 。

証明 マッチ棒は全部で $2N(N+1)$ 本あり、これが 3 の倍数となるので、 $N \equiv 0, 2 \pmod{3}$ 。

補題 2 $N \geq 4$ のとき、マッチ棒を全て取り除くことができるならば、 $N \equiv 1 \pmod{2}$ である。

証明 $N \times N$ のマス目の外周をなす $4N$ 本のマッチ棒全てを取り除くためには、1 行目か N 行目、または 1 列目か N 列目にある $4(N-1)$ 個のマス全てに対し作業を行わなくてはならない。

この作業で取り除かれるマッチ棒は $12(N-1)$ 本である。

マス $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, N-1)$ に対して作業 R ,

マス $(1, N), (2, N), \dots, (N-1, N)$ に対して作業 D ,

マス $(N, 2), (N, 3), \dots, (N, N)$ に対して作業 L ,

マス $(2, 1), (3, 1), \dots, (N, 1)$ に対して作業 U

を行うとこれら $4(N-1)$ 個のマスの下辺をなす全てのマッチ棒が取り除かれるが、このようなマッチ棒は $12(N-1)$ 本であるので、どのような作業をこれらのマスに行っても、取り除かれるマッチ棒は同じである。

以上の作業を行うと、マス $(2, 2), (3, 2), \dots, (N-2, 2)$ の下辺をなす $N-3$ 本のマッチ棒が残るわけだが、これらのマッチ棒を取り除くためには、マス $(3, 2), (5, 2), \dots$ に対して作業 L を行うしかなく、このときこの $N-3$ 本のマッチ棒は 2 本ずつ組になって取り除かれるので、全てのマッチ棒が取り除かれるとき、 $N \equiv 1 \pmod{2}$ となる。

補題 3 奇数 m に対して、 $N = m$ のときマッチ棒が全て取り除くことができるとき、 $N = m + 6$ のときもマッチ棒は全て取り除くことができる。

証明 m を奇数として、 $N = m + 6$ のとき、

マス $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, m+5)$ に対して作業 R ,

マス $(1, m+6), (2, m+6), \dots, (m+5, m+6)$ に対して作業 D ,

マス $(m+6, 2), (m+6, 3), \dots, (m+6, m+6)$ に対して作業 L ,

マス $(2, 1), (3, 1), \dots, (m+6, 1)$ に対して作業 U を行い、

さらに、

マス $(3, m+5), (5, m+5), \dots, (m+4, m+5)$ に対して作業 R ,

マス $(m+5, 3), (m+5, 5), \dots, (m+5, m+4)$ に対して作業 D ,

マス $(3, 2), (5, 2), \dots, (m+4, 2)$ に対して作業 L ,

マス $(2, 3), (2, 5), \dots, (2, m+4)$ に対して作業 U ,

マス $(4, 3), (6, 3), \dots, (m+3, 3)$ に対して作業 R ,

マス $(3, 4), (3, 6), \dots, (3, m+3)$ に対して作業 D ,

マス $(4, m+4), (6, m+4), \dots, (m+3, m+4)$ に対して作業 L ,

マス $(m+4, 4), (m+4, 6), \dots, (m+4, m+3)$ に対して作業 U

を行うと、真ん中に $m \times m$ のマス目が残る。

補題 4 $N = 2, 3, 5$ のとき、マッチ棒を全て取り除くことができる。

証明 $N = 2$ のとき、

マス $(1, 1)$ に対して作業 R ,

マス (1, 2) に対して作業 D ,
マス (2, 2) に対して作業 L ,
マス (2, 1) に対して作業 U
を行えば、全てのマッチ棒を取り除くことができる。
 $N = 3$ のとき、
マス (1, 1), (1, 2) に対して作業 R ,
マス (1, 3), (2, 3) に対して作業 D ,
マス (3, 2), (3, 3) に対して作業 L ,
マス (2, 1), (3, 1) に対して作業 U
を行えば、全てのマッチ棒を取り除くことができる。
 $N = 5$ のとき、
マス (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4) に対して作業 R ,
マス (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (4, 3) に対して作業 D ,
マス (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (3, 2) に対して作業 L ,
マス (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (2, 3) に対して作業 U
を行えば、全てのマッチ棒を取り除くことができる。
以上より求める N は、
 $N = 2, 6k + 3, 6k + 5$ k は 0 以上の整数である。

感想欄より

問題自体は簡単でしたが答案を作成するのに時間がかかりました。

問題を解くことよりもどうやって証明を言葉にするかに困った

C 分野の解答を書くのは本当に面倒ですね。

今回のが一番とつきやすかったです。

C 分野の問題は日常から作るものが多く、予備知識もあまり必要としないので、とっつきやすいものが多いですね。

(あだち じゅん
東京大学理学部地球惑星物理学科 3 年)