問題コーナー

第 1 回

松本 雄也

A

2006年 5月 1日出題
5月24日締切
6月 7日解説

高々 2 次の整数係数多項式（これを以下単に「式」とよぶ）に対する次の操作 A, B を考える.

- 式 ax^2+bx+c に操作 A を施すと, 式 $(b-a)x^2+(2a+c)x+a$ になる.
- 式 ax^2+bx+c に操作 B を施すと, 式 $(a+b+c)x^2+(3a+2b+2c)x+(a+b)$ になる.

式 x^2-2x+1 に操作 A, B をある順番で何回か施したところ, 式 kx^2+2x+1 が得られた. 整数 k として考えられるものをすべて求めよ. なお, 操作 A, B はどちらも 1 回以上施されたものとするが, どのような順番で施されたかはわからない.

解説

こんにちは, 出題者の松本です.

今回は, 出題期間中に web ページがアクセス不能になり大変ご迷惑をおかけしました.

では, さっそく解説に入ります.

以下では, 式 f に操作 A, B を施したものをそれぞれ f^A, f^B と書きます. より一般に, 式 f に操作 B を m 回施し, その後に操作 A を n 回施したものを $f^{B^mA^n}$ と書きます.

さて, 結論から言ってしまうと, kx^2+2x+1 の形の式が得られるのは $k=-2,-1,1$ のときのみで,

$$-2x^2+2x+1=f^{BA^2}(x)$$

$$-x^2+2x+1=f^{B^2A^3}(x)$$

$$x^2+2x+1=f^{B^3A}(x)$$

として得られます．ほとんどの解答者が，$k=-2,-1,1$ がこのように条件をみたすことを示していました．しかしながら，数学の証明としてはこの 3 つが条件をみたすことを示しただけでは不十分で，ほかの k が条件をみたさないことを証明しなければなりません．けれども，最初の式に操作 A，B を何回か施して得られる式は無限個あるため，そのすべてを実際に確かめてみることは不可能です．そこで何らかの工夫をして，無限個の対象が条件をみたさないことを同時に示すか，または操作を施す回数や k の範囲を絞り込むことが必要となります．

最初に紹介する答案では，操作 A，B を行った後の式の形に注目した巧妙な方法で，無限個の対象をいっぺんに扱うことに成功しています．

◦○◯ 解答例 1（kami 君の解答より）

補題 1 操作 A と B は可換である．すなわち，任意の式 f について，$f^{AB}=f^{BA}$ となる．

証明 式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f^A(x)=(b-a)x^2+(2a+c)x+a$ より，$f^{AB}(x)=(2a+b+c)x^2+(3a+3b+2c)x+(a+b+c)$ である．一方，$f^B(x)=(a+b+c)x^2+(3a+2b+2c)x+(a+b)$ なので，$f^{BA}(x)=(2a+b+c)x^2+(3a+3b+2c)+(a+b+c)$ である．よって両者は等しい．■

補題 1 より，操作 A，B の順序は結果に影響しないので，B を先に何回か施した後 A を何回か施すとしてよい．

補題 2 式 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の 2 条件のいずれかをみたすならば，任意の非負整数 n に対し，$f^{A^n}\neq kx^2+2x+1$（ただし f^{A^0} とは f 自身を表す）．

(1) $b>0, b-2c<0, 2a+c<0.$

(2) $b<0, b-2c>0, 2a+c>0.$

証明 式 f が(1), (2)のいずれかをみたすとき，式 f^A もまた(1), (2)のいずれかをみたすことを示す．これが示されれば，帰納的に任意の非負整数 n について f^{A^n} も(1), (2)のいずれかをみたし，一方 kx^2+2x+1 はどちらもみたさないので，主張が成り立つ．

$f(x)=ax^2+bx+c$ が条件(1)をみたしたとしよう．このとき $f^A(x)=a'x^2+b'x+c'$ は条件(2)をみたす．実際，

$$b'=2a+c<0,$$

$$b' - 2c' = 2a + c - 2a = c = \frac{1}{2}(b - (b - 2c)) > 0,$$

$$2a' + c' = 2b - 2a + a = 2b - a = \frac{1}{4}(9b - (b - 2c) - 2(2a + c)) > 0$$

より成り立つ．f が条件(2)をみたすときは，まったく同様の計算により，f^A は条件(1)をみたすことがわかる．■

補題 3 式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が条件 $a > 0, b > 0, c > 0$ をみたすならば，任意の正整数 n に対し，$f^{A^n} \neq kx^2 + 2x + 1$.

証明　非負整数 n に対し $f^{A^n}(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$ とおく．a_n, b_n, c_n は整数である．

すべての正整数 n について $a_n > 0, b_n > 0, c_n > 0$ である場合は，$b_n = 2a_{n-1} + c_{n-1} \geqq 3 > 2$ より，主張は成り立つ．

$a_n > 0, b_n > 0, c_n > 0$ が成り立たない n が存在する場合を考える．そのような n のうち最小のものを m とする．$m \geqq 1$ である．$b_m = 2a_{m-1} + c_{m-1} > 0$, $c_m = a_{m-1} > 0$ より $a_m \leqq 0$ であり，また m の最小性より $a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1} > 0$.

このとき，$f^{A^{m+3}}$ は補題 2 の条件(2)をみたす．実際,

$$\begin{aligned} b_{m+3} &= 2a_{m+2} + c_{m+2} = 2b_{m+1} - a_{m+1} = 5a_m - b_m + 2c_m \\ &= 5a_m - c_{m-1} < 0, \end{aligned}$$

$$b_{m+3} - 2c_{m+3} = c_{m+2} = a_{m+1} = b_m - a_m > 0,$$

$$\begin{aligned} 2a_{m+3} + c_{m+3} &= 2b_{m+2} - a_{m+2} = 5a_{m+1} - b_{m+1} + 2c_{m+1} \\ &= 5b_m - 5a_m - c_m = -5a_m + 9a_{m-1} + 5c_{m-1} > 0 \end{aligned}$$

より成り立つ．よって補題 2 より，$n \geqq m + 3$ ならば $f^{A^n} \neq kx^2 + 2x + 1$.

$1 \leqq n < m$ ならば $b_n \geqq 3$（前と同様）なのでやはり $f^{A^n} \neq kx^2 + 2x + 1$ である．

さらに，$n = m, m+1, m+2$ に対しても $f^{A^n} \neq kx^2 + 2x + 1$ であることは,

$$b_m - 2c_m = c_{m-1} > 0,$$

$$c_{m+1} = a_m \leqq 0,$$

$$c_{m+2} = a_{m+1} = b_m - a_m \geqq b_m = 2a_{m-1} + c_{m-1} \geqq 3$$

よりわかる．以上より主張は示された．■

さて，$f(x) = x^2 - 2x + 1$ とおくと,

$$f^{BA^3}(x) = 4x^2 - 3x - 2,$$

$$f^{B^2A^4}(x) = 3x^2 - x - 1$$

はどちらも補題 2 の条件(2)をみたし，

$$f^{B^3A^2}(x)=x^2+3x+1,$$

$$f^{B^4}(x)=3x^2+7x+3,$$

$$f^{B^n}(x)=(3x^2+7x+3)^{B^{n-4}} \quad (n \geqq 5)$$

は（操作 B の式の形より）すべて補題 3 の条件をみたすので，これらに操作 A を何回施しても kx^2+2x+1 の形にはならない．したがって，あとは $f^{BA}, f^{BA^2}, f^{B^2A}, f^{B^2A^2}, f^{B^2A^3}, f^{B^3A}$ を計算して kx^2+2x+1 の形になるかを調べればよい．調べると，$k=-2,-1,1$ のみが適することがわかる．

うまい条件（補題 2 の(1), (2)）を考えることにより，あるところ以降の式がすべて条件をみたさないことを示しています．この解法は出題者の想定外でした．

次に紹介する答案はまた別の手法を用いており，式と操作の関係を実数の掛け算の関係に帰着しています．

◦○○ 解答例 2（松田崇志君の解答より）

補題 4 $g(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおく．ξ が方程式 $g(x)=0$ の根であるとき，任意の式 f に対し，

$$f^A(\xi)=\xi\cdot f(\xi)$$

$$f^B(\xi)=\frac{1}{\xi-1}\cdot f(\xi)$$

が成り立つ．

証明 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，

$$\begin{aligned}\xi\cdot f(\xi)&=a\xi^3+b\xi^2+c\xi=a(-\xi^2+2\xi+1)+b\xi^2+c\xi\\&=(b-a)\xi^2+(2a+c)\xi+a=f^A(\xi),\\(\xi-1)\cdot f^B(\xi)&=(\xi-1)((a+b+c)\xi^2+(3a+2b+2c)\xi+(a+b))\\&=(a+b+c)\xi^3+(2a+b+c)\xi^2-(2a+b+2c)-(a+b)\\&=(a+b+c)(-\xi^2+2\xi+1)\\&\quad+(2a+b+c)\xi^2-(2a+b+2c)\xi-(a+b)\\&=a\xi^2+b\xi+c=f(\xi)\end{aligned}$$

なのでどちらも成り立つ．■

ここで解の配置を調べる．3 次方程式 $g(x)=x^3+x^2-2x-1=0$ は，$g(-2)<$

$0 < g(-1)$, $g(-1) > 0 > g(0)$, $g(1) < 0 < g(2)$ より，$-2 < \gamma < -1$，$-1 < \beta < 0$，$1 < \alpha < 2$ なる 3 つの実数解 α, β, γ をもつ．（一般に n 次方程式は n 個より多くの解を持たないので，$g(x) = 0$ の解はこれだけ）．

とくに，β を代入した場合について考えると，$|\beta| < 1$，$\left|\dfrac{1}{\beta - 1}\right| < 1$ なので，式に β を代入したときの値の絶対値は操作 A，B を行うごとに減少する．一方，$|k\beta^2 + 2\beta + 1|$ はある程度までしか小さくならないので，操作を行う回数を上から押さえることができる．以下で精密な評価を行い具体的な上界を求める．

$f(-0.45) = 0.011375 > 0$，$f(-0.44) = -0.011584 < 0$ より，$-0.45 < \beta < -0.44$．よって $|\beta| < \dfrac{5}{7}$，$\left|\dfrac{1}{\beta - 1}\right| < \dfrac{5}{7}$，また $|f(\beta)| = |\beta^2 - 2\beta + 1| = (\beta - 1)^2 < 2.1025$．

$k \geqq 0$ のとき，$|k\beta^2 + 2\beta + 1| = k\beta^2 + 2\beta + 1 \geqq 2\beta + 1 > 0.1$ であり，$k < 0$ のとき，$|k\beta^2 + 2\beta + 1| \geqq |-\beta^2 + 2\beta + 1| = (\beta - 1)^2 - 2 > 1.44^2 - 2 = 0.0736$.

以上より，$f(x) = x^2 - 2x + 1$ に操作 A，B を合わせて 10 回以上施して $kx^2 - 2x + 1$ になったとすると，

$$0.0736 < |k\beta^2 + 2\beta + 1| < \left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cdot f(\beta) < \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot 2.1025 < \frac{2.24}{32} = 0.07$$

となり矛盾する．したがって，操作 A，B を合わせて高々 9 回以下施したものをすべて調べ上げればよい．すると解はの 3 つ，すなわち $k = -2, -1, 1$ のみであることがわかる．

問題に出てくる「式」および「操作」はそのままでは扱いが難しいですが，うまく式 f に実数 $f(\beta)$ を対応させたことにより，操作 A を「β 倍」，B を「$\dfrac{1}{\beta - 1}$ 倍」という扱いやすい形にすることに成功しています．

なお，補題 4 の $g(x)$ は天下り式に突然与えられたように見えますが，

- 式 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ に操作 B を施していくと $(x - 1)^2 \to x - 1 \to 1$ となる．
- 式 1 に操作 A を施していくと $1 \to x \to x^2$ となる．

ということから A，B はそれぞれ「掛ける x」「割る $(x - 1)$」のようなものなのではないかと推測し，では何かよい ξ を代入すれば本当に ξ 倍，$\dfrac{1}{\xi - 1}$ 倍になるの

かと調べれば，発見は困難ではないと思います.

また $|f(\beta)|$ という量が，操作により必ず減少するいわば「減少量」になっていることで操作の回数の上界が求まり，有限の調べ上げに帰着できているのも大きなポイントです.

一般に，ある一群の操作・変換により必ず増加する／必ず減少する／変化しない量を考えることはしばしば有効であり，とくに変化しない量は「不変量」と呼ばれきわめて重要であり，問題の本質にも大きく関わってきます.

実は，この問題にも不変量を用いた解法が存在します.

◦○○ 別解（出題者の解答）

式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$N(f)=a^3-2a^2b-ab^2+b^3+6a^2c-abc-2b^2c+5ac^2-bc^2+c^3$ と定める.

主張 1 $N(f)=N(f^A)=N(f^B)$ が成り立つ.

証明　地道に計算すれば（大変だが）示せる．または，次の二つの主張

主張 2 $N(f)=f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)$ である.

主張 3 $\alpha\beta\gamma=1$，$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=1$ である.

（いずれも単純計算で示せる）および補題 4 を用いれば，f^A の方は

$$\begin{aligned}N(f^A)&=f^A(\alpha)f^A(\beta)f^A(\gamma)\\&=\alpha f(\alpha)\cdot\beta f(\beta)\cdot\gamma f(\gamma)\\&=\alpha\beta\gamma\cdot f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=N(f)\end{aligned}$$

として示され，f^B の方も同様である．■

さて，N は操作 A，B により変わらないので，$N(x^2-2x+1)=N(kx^2+2x+1)$ が成立する．これを展開すると，k に関する 3 次方程式 $1=k^3+2k^2-k-1$ が導かれ，k はこれの解 $1,-1,-2$ のいずれかでなければならないことがわかる．これらがいずれも条件をみたすことは容易に確認できる.

「別解」の背景にあるのは次の定理です.

対称式の基本定理

n 個の変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の多項式であって，どの x_i と x_j を入れ替えても式全体として変化しないものを対称式とよぶ．とくに，$1\leqq i\leqq n$ に対し，

$$s_i=\sum_{1\leqq k_1<k_2<\cdots<k_i\leqq n}x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_i}$$

で定義される s_i を $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する i 次の基本対称式とよぶ．たとえば $n=3$ ならば，$x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$ や $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$ などは対称式であり，基本対称式は

$$s_1 = x_1+x_2+x_3$$
$$s_2 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$
$$s_3 = x_1x_2x_3$$

の 3 つである．

定理（対称式の基本定理） F が $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する対称式ならば，F は $s_1, s_2, \dots, s_n$ の多項式として一意に書ける．F が $x_1, x_2, \dots, x_n$ の多項式として有理数係数（または整数係数）ならば，$s_1, s_2, \dots, s_n$ の多項式としてもそうなる．

$g(x)$ の 3 根 α, β, γ の基本対称式は（解と係数の関係より）整数値をとるので，この定理を α, β, γ に対して用いることにより，主張 2 の式で $N(f)$ を定義したとき，（具体的な形は実際に計算しないとわかりませんが）$N(f)$ が f の係数 a, b, c の整数係数多項式になることは保証されます．

このことと，都合よく主張 3 が成り立っていることにより，すぐに k が 3 通りに絞られて解決しました．

ただ，「別解」の手法は今回の問題の場合はうまくいって数行で証明が完了しましたが，

- うまい多項式 $g(x)$ が存在して，操作 A，B の両方に対し補題 4 のような結果が成り立つ．
- 主張 3 において両者が 1 になる．
- この方法により絞られた 3 通りの k がすべて実現される（数値設定によって 3 通りのうち一部しか実現されないようにもできる．こうなった場合，結局解答例 1 や 2 のような手法を援用しなければならない）．

といった幸運な状況に依存しているので，手法の一般性という点では解答例 1 や 2 にやや劣るかもしれません．

感想欄より

難しかった.

非常に難しかったです.

どうやら出題者の想定より難しくなってしまったようです.
今回解けなかった人も，次回以降の問題に挑戦してみて下さい.

第 1 回は全然解けなかったので（三日前に問題を知って時間切れのところもある）第 2 回は完答を目指して頑張りたいと思います.

解答お待ちしております.

(まつもと ゆうや
東京大学理科一類 2 年)