

# 2015年度JMO夏季セミナー本の紹介

数学オリンピック財団  
JMO夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の9冊です.

1. パズル・ゲームで楽しむ数学 - 伊藤 大雄
2. 平方剰余の相互法則 - 倉田令二郎
3. 無理数と超越数 - 塩川宇賢
4. 数学基礎論講義 - 田中一之
5. ルベーグ積分講義 - 新井仁之
6. Morse 理論の基礎 - 松本幸夫
7. 結び目と量子群 - 村上順
8. Groups, Graphs and Trees - John Meier
9. Rational Points on Elliptic Curves - J. H. Silverman, J. Tate

## 洋書を読むにあたって

8, 9は洋書(英語の本)です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは(予備知識として仮定されている場合を除いて)ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は(通常)英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから1冊ずつ内容を紹介していきます. なお, セミナーで本を担当する人と, 紹介文を書いた人とは異なる場合があるのでご了承ください.

## 「難易度の目安」について

本選びの参考として、それぞれの本に難易度の目安を掲載しました。☆の数の意味は次の通りです：

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本。

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本。

☆☆☆ 数学書に慣れている人、発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本。

もちろん、これらはあくまで目安です（最初は易しいが後半は高度な内容を含む、といったこともあります）。夏季セミナー初日には、担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので、そこで興味をもった本を選んでください。

## 1 パズル・ゲームで楽しむ数学 - 伊藤 大雄

### ■難易度の目安 ☆

この本の副題は「娯楽数学の世界」となっており、その名の通り「娯楽を対象とした数学」が展開されています。皆さんの身の回りにあるパズルを題材とし、それらを数学的考察によって解き明かしていきます。

$n$  個のコインの中から天秤をなるべく少ない回数だけ用いて偽物のコインを探し出す方法、価値観の異なる  $n$  人に誰にも不満が残らないようケーキを分割するアルゴリズム、そして「ニム」と呼ばれるゲームとその一般化など、章ごとに異なる親しみやすい話題で構成されています。各章は独立しているののでどこからでも読み始めることができます。

一例として、「ニムと半順序ゲーム」の章を少し紹介しましょう。この章では初めに、3つの石の山から1つを選びその山から好きなだけ石を取ることを2人が繰り返し、最後の石を取った方が勝ちという「ニム」というゲームについて考察をします。そしてニムと類似した2人ゲームについても触れます。最終的にはそれらをグラフ理論的手法を用いて一般化し、どのような2人ゲームならば必勝法が計算できるかという問題についての考察を深めます。一見難しそうに見えるかもしれませんが一貫して丁寧に書かれているため、前提知識がなくとも読み進めることができます。

各章は初心者にもわかりやすく、親切に書かれているので、数学的知識には不安はあるがパズルが好きの人、ゲーム理論に触れてみたい人などにはおすすめの本です。各章末には演習問題が用意されていて、その章で学んだ内容を実際に使うことができます。前提知識も特に必要ありません。中学数学程度の知識があれば充分読むことができます。楽しく数学の世界に触れたい方は大歓迎です。

(文責：野村 建斗)

## 2 平方剰余の相互法則-ガウスの全証明 - 倉田令二郎

■難易度の目安 ☆

奇素数  $p$  とそれと互いに素な整数  $a$  について,  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  をみたす整数  $x$  が存在するとき  $a$  は  $p$  を法として平方剰余であるといい, 存在しないとき  $a$  は  $p$  を法として平方非剰余であるといいます.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方剰余のとき}) \\ -1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方非剰余のとき}) \end{cases}$$

と定めます (これをルジャンドル記号といいます). このとき, 平方剰余に関して次の 3 つの定理が成り立ちます.

$$(1) \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$(2) \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$$(3) \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \quad (p, q \text{ は相異なる奇素数})$$

この 3 つの定理は上から順に, 「平方剰余の第一補充則」「平方剰余の第二補充則」「平方剰余の相互法則」とよばれ, その中でも「平方剰余の相互法則」は強力な定理です. この 3 種類の法則を使えば,  $\left(\frac{a}{p}\right)$  が機械的に求まります.

ガウスは「平方剰余の相互法則」を最初に証明し, その後, 7 種類の独立した証明を与えていて, 本書にはこの定理の 7 種類の証明がすべて載っています. 同じ定理の証明を 7 種類も把握するのは一見無意味に見えるかもしれませんが, これらを通じて, 二次形式, 円分多項式など, 様々な整数論のトピックを学べるうえ, 第 6 の証明は立方剰余や 4 乗剰余にも拡張できる証明であるので, 平方剰余の相互法則をより高い視点で見られると思います. ガウス自身も, 立方剰余, 4 乗剰余につながる証明を模索するために, 様々な手法で平方剰余の相互法則を証明したそうです. この 7 種類の証明を知ることによって, ガウスの数学思想も知ることができます.

本書の第 0 章に初等整数論の基本事項が載っていますが, 整数の扱いにはある程度慣れていることが望ましいでしょう (難易度が☆一つの本の中では難しい方だと思います). また, 整数以外では, 群・環・体の定義や, 二次の行列の計算 (第 2 の証明で使います) について知っていることが望ましいです. 興味のある方は事前に整数論の基本の部分 (フェルマーの小定理,  $\text{mod } p$  における逆元の存在, 平方剰余の第一, 第二補充則あたり) を勉強することをお勧めします.

(文責: 上笠 隆宏)

### 3 無理数と超越数 - 塩川宇賢

■難易度の目安 ☆☆

中学校で習うように、すべての実数は「有理数」「無理数」の2種に分類されます。これは、ある数が整数の比で表せるかという基準による分類で、無理数は、整数の比で表せる有理数に比べれば代数的に複雑な数だということができます。

数の代数的な複雑さによる分類には、「有理数」「無理数」の他にも「代数的数」「超越数」というものがあります。具体的にはある整数係数の方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

の解となる数を代数的数と、ならない数を超越数といいます。超越数は、無理数の中でも特に複雑な数ということになります。ここで、ある数が有理数であることはそれが1次の整数係数の方程式の解になることと同値であるという見方もできますね。

高校までに習う数の中にも無理数・超越数はたくさんあります。たとえば

$$\pi, e, \log_2 3, 2^{\sqrt{2}}, \cos 1$$

などはすべて超越数ですし、

$$\sqrt{2}, \cos 1^\circ$$

などは超越数ではありませんが、無理数です。また、集合論的にも「ほとんどすべての実数が無理数・超越数である」ということが知られており、無理数・超越数は実はそこら中に溢れています。

しかし、皆さんが無理性を証明できる数は、実はかなり少ないのではないのでしょうか？たとえば  $e$  や  $\pi$  が無理数だという事実は聞いたことがあっても、証明の方法は全く想像がつかないという人も多いでしょう。超越性の証明ともなると、なおさらのことだと思います。そういった様々な数の無理性・超越性の証明が、本書では幅広く紹介されています。1つ1つの証明も独特で面白いですし、テーマもわかりやすいので、中高生の皆さんでも興味をもって楽しく学べると思います。

また、無理数・超越数論の結果のいくつかは、方程式の整数解を調べる問題などにも応用されています。たとえば本書の3章で扱われている Roth の定理を用いて、定数  $k$  に対して  $x^3 - 2y^3 = k$  の整数解  $(x, y)$  が有限個しかないことを示すことができます。このような、無理性・超越性の判定という問題意識からは意外な応用があるのも無理数・超越数論の面白さの1つだと思います。

本書は最初からきちんと読み進めていかななくても、読みたいトピックを選んで読める本なので、セミナーでは  $e$  や  $\pi$  など高校生でもよく知っているであろう数の無理性・超越性の証明を優先的に読んでいきたいと思います。1つ1つの証明がやや長めのものが多いので、数学書に親しみがないと苦労も多いと思いますが、諦めず丁寧にコツコツ読み進めていきましょう。

本書を読むにあたっての予備知識ですが、少なくとも高校範囲の微積分を十分に理解していることを仮定します。他に一部の定理の証明には複素関数論・線形代数の初歩を使うのでこれらの知識があると理想的ですが、知らなくても適宜チューターが説明します。

(文責：早川 知志)

## 4 数学基礎論講義 - 田中一之

■難易度の目安 ☆☆

皆さんの中には、数学の魅力をその議論の厳密性に覚える人も多いかもしれません。では一体数学の厳密性は何によって保証されているのでしょうか。大抵の数学書は定義(または公理)から始まり、証明と呼ばれる演繹手続きを経て得られた結果を定理(または命題)という形にまとめています。エウクレイデス『原論』にまでさかのぼることのできるこの論証スタイルは、議論が厳密であることを表す象徴として数学以外でも意識的に用いられてきました。この論証スタイルの強みは議論の前提としたい事実を公理、定義と呼ぶことでその妥当性を不問とし、定理の妥当性を証明の部分にもたせることにあります。そこで問題となるのは、「証明」はどのようにして妥当性を帯びるのか、すなわち「証明」において用いられる「推論」はどのように正当化されるのかということです。この疑問がもとになって、「証明」における妥当な推論形式を調べる学問、即ち論理学(数理論理学)が生まれることとなります(数学基礎論においては「証明論」が扱う内容です)。

基礎論は伝統的に「モデル理論」「公理的集合論」「証明論」「再帰理論」の4つの分野に分けられています。この4つの分野のうち本書は証明論と再帰理論を主に扱っています。証明論とは数学における「証明」の構造に焦点を当てる分野です。証明論ではまず数学における「公理」「定理」「証明」などを形式化し、それにより数学自体を数学的に解析することを可能にします。歴史的にはゲーデルによる不完全性定理が有名です。この不完全性定理には、「自然数論の無矛盾な公理系をどのように定めたとしてもそこでは証明も反証もできない命題が必ず存在する」という第一定理と、「自然数論の無矛盾な公理系をどのように定めたとしてもそこでは自らの無矛盾性を証明することはできない」という第二定理があります。一方再帰理論とは、自然数から自然数への関数についてそれが計算可能であるとはどういうことかを研究する分野です。不完全性定理の証明の重要なアイデアに、論理式や証明を自然数に対応させるというゲーデル数化と呼ばれる手法があります。計算可能性の概念はゲーデル数化を介して証明論に応用されます。

本書のサブタイトルは「不完全性定理とその発展」ですが、これが示すように不完全性定理の内容とその証明を理解することが前半のテーマとなっています。本書では不完全性定理を理解するための準備として、述語論理と完全性定理、再帰的関数について学び、その後不完全性定理の詳細な証明を与えています。セミナーにおいてもこの前半部分を扱う予定です。

予備知識は高校範囲の集合論の知識を持っていれば十分です。数学基礎論は情報科学や論理学、そして哲学にも深い繋がりががあります。そのような分野に興味がある人にも是非お勧めしたい本です。

(文責：増田 成希)

## 5 ルベーグ積分講義 ~ルベーグ積分と面積0の不思議な図形たち~ - 新井仁之

■難易度の目安 ☆☆

「面積」とは何でしょうか?直感的には平面上の図形の大きさ、としてとらえられる量ですが、与えられた図形に対して「面積」を定める方法はあるのでしょうか?

一つの方法として積分が考えられます。リーマンは、グラフに囲まれた図形の面積を求める方法を定式化しました。これは「リーマン積分」とよばれ、高校で学ぶ積分はすべてこの方法で求められます。

しかし、リーマン積分では  $\{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1, x \text{ は有理数}\}$  といったような図形に対しては面積を求めることが出来ません。

ルベーグはこの問題を解決するために、新しい積分の方法を考案しました。その過程で、平面図形の面積を「測度」として一般化しました。「ルベーグ測度」は正方形や長方形といった基本的な図形から出発して、さまざまな図形の面積を求めます。このときに「無限個の図形を敷き詰める」というアイデアを用いたことで、先に述べたようなリーマン積分で求まらない面積も求められるようになっています。積分の定義域に対して「ルベーグ測度」を考えることで、高校までのリーマン積分の一般化である「ルベーグ積分」を定義することが出来ます。

本書ではこれらの測度、積分についての入門書です。セミナーにおいては、ルベーグ測度の構成やその合同変換による不変性、ルベーグ積分の定義や性質が主なテーマとなるでしょう。図や例も多く、開集合や閉集合などの基本的な事柄から説明されているので、初学者も安心して取り組みたいと思います。実数や極限に関する基本的な性質をある程度知っている取り組みやすいでしょうが、それについても付録にまとめてあるのでセミナー中に対応することは可能です。セミナーの進度に応じて、様々な「面積が0」の集合に関する不思議な話題を多く扱えるでしょう。

(文責：久良 尚任)

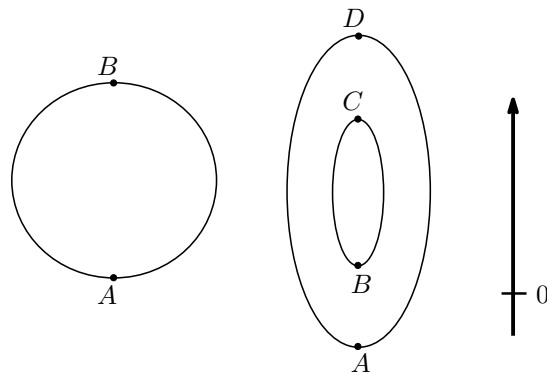
## 6 Morse 理論の基礎 - 松本幸夫

### ■難易度の目安 ☆☆☆

図形の性質を調べる際に、その図形上で定義された関数を用いるという方法があります。Morse 理論では、とくに関数の臨界点から図形の情報を引き出します。

球面とトーラス (ドーナツの表面) を例にして考えてみましょう。球面やトーラスは、平面 (2次元のユークリッド空間) ではありませんが、各点の周りでは平面のようになっており、このような図形を2次元多様体といいます。一般の  $n$  次元多様体も同様に定義されます。Morse 理論では、特に閉じた (境界のない) 多様体を対象にします。

図のように3次元空間の中に球面とトーラスを置き、矢印の方向に「高さ」を定めます。「高さ」はそれぞれの図形の上で定義された関数になっています。



この2つの図形のそれぞれについて、「高さ」が瞬間的に変化しない(あらゆる方向への微分が0になる)点があり、このような点を臨界点といいます。球面については図のA, Bであり、それぞれ関数が極小値・極大値をとるような点になっています。球面上のAの周りについては、適当に $xy$ 平面と同一視することで(Aが原点に対応するようにする)「高さ」を $x^2 + y^2 + c$ ( $c$ は定数)と表すことができ、同様にBの周りでは $-x^2 - y^2 + c$ と表すことができます。トーラスについてはA, B, C, Dの4つの臨界点があり、そのうちB, Cは極小値でも極大値でもありません。この2つの点の周りでは、適当に $xy$ 平面と同一視すると「高さ」は $-x^2 + y^2 + c$ と表されます。このように臨界点にもいくつか種類があることが分かります。

一般に $n$ 次元に話を拡張すると、関数は各臨界点の周りで $-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 + c$ という形で表されることが分かり、このとき $p$ をその臨界点の指数とよびます。ただし、関数としては、各臨界点について、あらゆる方向への2階微分が0でないようなもの(Morse関数)をとります。Morse関数が豊富にあることや指数が座標のとり方によらず定まることなどは、本の前半で示される重要な事実です。Morse関数を用いると、閉じた多様体を「ハンドル」とよばれる基本的な部品に分解できることが分かるのですが、このときにどのような部品を用いればよいかは各臨界点の指数から決まります。

この本では、まず曲面(2次元)の場合について考えてから、一般の次元で理論を展開していきます。2次元の場合に視覚的なイメージをしっかりと掴むことができれば、一般の次元の話も理解しやすくなることでしょう。予備知識についてですが、この本においては多様体上の関数を局所座標(ある点の周りでの座標)を用いて調べるということを繰り返し行うので、行列の計算・行列式と多変数の微分(偏微分・変数変換)については知っていなければなりません。位相の初歩(ハウスドルフ性・コンパクト性)を知っているとなおよいでしょう。

(文責：峰岸 龍)

## 7 結び目と量子群 - 村上順

■難易度の目安 ☆☆☆

この本では結び目理論と量子群の2つのテーマについて、その関連が述べられています。

まず、結び目とは3次元空間の中でひもを絡ませて両端を繋げた図形のことをいいます。このひもは自由に伸び縮みできるものとし、またひもを動かしてうつりあうものを同一視します。たとえば、ひもを1度結んだあと両端を繋げたものは三葉結び目とよばれ、三葉結び目はただ両端を繋げてできるもの(自明な結び目という)とは異なる結び目です。一般に2つの結び目が異なること、すなわち互いにうつりあわないことを示すのは容易ではありませんが、その強力な手段として結び目に多項式を割り当てるというものがあります。ジョーンズ多項式と呼ばれるものはその一例で、先ほどの例である三葉結び目と自明な結び目を区別するほか、比較的多くの結び目を区別することができます。このように、結び目理論において多項式という不変量は中心的な役割を果たしています。

一方、量子群は数理物理学の分野から生まれたものです。物理学の一分野である量子力学は、それまでの古典力学では説明できない様々な事象を解明しました。量子力学を特徴付ける物理量としてプランク定数  $h$  というものがありますが、 $h$  が0に近づくとき、すなわち  $h$  を十分小さいとみなせるとき古典力学の結果と一致するという関係があります。この関係を逆手にとって、既存の数学的対象にパラメタ  $h$  を付加することで新たな数学的対象を構築するということが考えられ( $h \rightarrow 0$  のとき、もとの数学的対象と一致するようにする)、この操作は「量子化」と呼ばれています。量子群は、対称性を記述する数学的対象であるリー代数(の普遍包絡環)を  $q = e^h$  というパラメタを用いて量子化したもので、数学や物理学の世界で広く用いられています。また  $q$  が1に近づくともとのリー代数が現れるという関係を持っています。

さてリー代数などの対象を扱うとき、別の扱いやすい数学的対象(線形代数など)によってモデル化するということが考えられ、そのことを表現といいます。リー代数を量子化した量子群に対しても表現が考えられますが、実は量子群の表現を考える中で結び目(正確には組みひも群とよばれるもの)との対応が得られ、そこから結び目の不変量を与えることができるのです!この本では、リー代数  $sl_2$  を量子化した  $U_q sl_2$  から上で述べたジョーンズ多項式が得られる様子や、表現のテンソル積が結び目の平行化という操作に対応している様子などが述べられており、結び目と量子群が深い関連性、さらには量子群の豊かな構造の片鱗をまざまざと見せつけられることでしょう。

予備知識としては線形代数(テンソル積が分かる程度)を仮定します。また群論と環論の初歩(準同型定理やイデアルなど)についても知っていることが望ましいです。

(文責: 北村 拓真)

## 8 Groups, Graphs and Trees - John Meier

■難易度の目安 ☆

この本のタイトルを直訳すると「群・グラフ・木」となります。まず、群、グラフ、木とはそれぞれ何なのかを順に見ていきましょう。群とは、二項演算が定義された集合であって、その二項演算に関し



て結合法則が成り立ち、単位元が存在し、任意の元に対して逆元が存在するもののことです。こう書くとも難しく感じるかもしれませんが、実は高校までで学ぶ数学の中にも群はたくさん出てきます。整数全体の集合 (二項演算は加法), 正の実数全体の集合 (二項演算は乗法), 実数上の連続関数全体の集合 (二項演算は加法),  $n$  人を 1 列に並べる順列の集合 (二項演算は並べ替える操作の合成) などがその例で、皆さんにとっても馴染みの深いものが多いと思います。では次にグラフと木を定義しましょう。グラフとは、頂点の集合と、2 つの頂点を結ぶ辺の集合からなる図形のことです。グラフのうち、任意の 2 頂点間を辺を辿って移動する方法がちょうど 1 通りであるものを木とよびます。

群  $G$  に対して  $G$  を頂点の集合とするようなグラフを作ることができ、これを  $G$  の Cayley グラフといいます。たとえば、整数全体の集合がなす群からは下のような 2 つのグラフを作ることができます (他にもたくさんのグラフが作れますが、これらはすべてある意味で“同じ”とみなすことができます)。この本の最終章で扱います。



群  $G$  の元を掛ける (二項演算を施す) ことは、 $G$  の Cayley グラフ上ではその元のみだけ平行移動することに対応しています。より一般に、群とその Cayley グラフやある種の木との関係を詳しく観察することで、グラフという図形の幾何を使って群の性質を調べる学問を幾何学的群論といいます。

この本は幾何学的群論の入門書であり、無限個の元からなる群 (無限群) のうち、有限生成、有限表示可能といった比較的扱いやすい性質をもつ群を主な対象としています。また、奇数章で幾何学的群論の一般論を展開し、偶数章ではこの分野に特徴的な無限群の例を紹介する、という構成のため、参加者の興味に応じて多様な読み進め方ができると思います。この本を読むにあたって、群の定義に馴染みがあり、群の具体例をいくつか知っていると思ひやすいですが、必要に応じてチューターが補足するので特に予備知識は仮定しません。逆に、この本には一般的な群論の入門書では出会うことのない群の例がたくさんありますし、扱うグラフも頂点・辺が無限個のもの (無限グラフ) がほとんどであり、有限グラフを主に扱うグラフ理論の入門書とは少し趣向が異なるので、群論やグラフ理論に触れたことがあるが違う見方を学んでみたい方、それらがどのように繋がるのかに興味がある方にもおすすりめる本です。

(文責 : 安田 真由美)

## 9 Rational Points on Elliptic Curves - J. H. Silverman, J. Tate

■難易度の目安 ☆☆

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$  の形の方程式が与えられたとき、この方程式をみたす点  $(x, y)$  全体のなす曲線を楕円曲線と呼びます。このような曲線が与えられたとき、この曲線に有理点 ( $x$  座標も  $y$  座標も有理数である点) や整点 ( $x$  座標も  $y$  座標も整数である点) がはたして存在するか、また存在するな

ら無限個か有限個か、という興味ある問題が発生します。一般にこのような問題に答えることは簡単ではありません。たとえば、 $y^2 = x^3 - 5x$  上には無限個の有理点がありますが、 $y^2 = x^3 - x$  上には  $(0, 0)$ ,  $(1, \pm 1)$  の 3 個しかありません。

楕円曲線特有の性質として、曲線上にある 2 点を「足し合わせて」新たな点を得る操作 (加法) が存在し、さらにこの操作による有理点と有理点の「和」はまた有理点になるというものがあります。たとえば、 $y^2 = x^3 - 2$  上の有理点として  $(3, 5)$  はすぐに見つかりますが、この点を「2 倍」する  $((3, 5)$  と  $(3, 5)$  を足す) と  $(\frac{129}{10^2}, \frac{383}{10^3})$ , さらにこれを「2 倍」すると  $(\frac{2340922881}{7660^2}, \frac{113259286337292}{7660^3})$  になり、簡単には見つからない有理点が次々と計算できます。この点と点の「和」から、さまざまな楕円曲線の深い性質が導かれます。

本書の前半部分では、楕円曲線およびその上の「加法」の定義をし、与えられた楕円曲線のすべての有理点はある有限個の点を「足し合わせる」ことで得られる (群論の用語を用いれば、「有理点のなす群は有限生成である」) という Mordell の定理など、興味深い定理を証明していきます。セミナーではこの部分を読み進めることになるでしょう。丁寧に説明されていますので、はじめて楕円曲線に触れる人でも問題なく読み進められると思います。

代数・数論・幾何と様々な分野が融合しますが、高等な予備知識は特に必要ありません。高校レベルの座標幾何と多項式の微分を知っていれば十分でしょう。「(可換) 群」について多少知っているとういですが、必須ではありません。

(文責：大場 亮俊)