2014年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の 9 冊です.

1. 群論への 30 講 - 志賀浩二
2. グラフ理論入門 - R. J. Wilson(著), 西関隆夫（訳）, 西関裕子 (訳)
3. 素数と 2 次体の整数論 - 青木昇
4. 線形代数と量子力学 - 竹内外史
5. 複素関数入門 - 神保道夫
6. 曲線と曲面の微分幾何 - 小林昭七
7. Integer Partitions - George W.Andrews, Kimmo Eriksson
8. A Course in Arithmetic - Jean-Pierre Serre
9. Complex Algebraic Curves - Frances Kirwan

洋書を読むにあたって

7, 8, 9 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから 1 冊ずつ内容を紹介していきます. なお, セミナーで本を担当する人と, 紹介文を書いた人とは異なる場合があるのでご了承ください.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです :

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

1 群論への 30 講 - 志賀浩二

■難易度の目安 ☆

群とは, 簡単にいえばある種の変換の集まりを定式化した代数的な構造です. まずいくつか群の例を挙げてみます.

- 正多面体があるとき, それを回転して元の形に戻るような変換の集合が合成に関してなす群 (正多面体群)
- 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への全単射全体の集合が合成に関してなす群 (n 次対称群)
- 整数全体が加法に関してなす群
- 自然数 n に対して, n と互いに素な n 以下の自然数が乗法に関してなす群

正確には, 群とは二項演算 (積や合成) が定義され, 結合法則が成り立ち, 単位元 (恒等変換) が含まれ, 任意の元に対しその逆元 (逆変換) が存在するような集合のことをいいます.

上のような一見異なった対象が同じ枠組みで捉えられることからもわかるように群という構造は非常に汎用性が高く, 近現代の数学にも頻繁に登場します. また, 4 番目の例は数学オリンピックでもよく知られているフェルマーの小定理やオイラーの定理などとの関係が深く, 群論が初等整数論にも応用できたり, 見通しの良い視点を与えてくれたりすることを示しています.

本書は各講 8 ページほどからなる 30 の講で構成されています. はじめは正多面体群や対称群のような変換の色彩の強い例で群を導入し, 次第に抽象的な群論にも馴染めるように書かれています. 中盤までで群論の一般論における最重要事項を学び, 後半ではいくつかのより進んだ内容 (基本群, 位相群, 表現など) を垣間見ることができます.

この本を読むにあたっては, 予備知識はほとんど必要ありません. 後半には行列や位相の基礎を仮定している講も一部ありますが, チューターが必要に応じて飛ばしたり知識の補充をしたりするので問題ないと思われます. 数学書としてもあまり形式張らない形で書かれているので, 数学書をほとんど読んだことがないが高校の先の数学に触れてみたい, という人には特におすすめです.

(文責 : 増田 成希)

2　グラフ理論入門 - R. J. Wilson(著), 西関隆夫 (訳), 西関裕子 (訳)

■難易度の目安 ☆

この本はグラフ理論を扱っています. まず, グラフとは, わかりやすくいうと, 点と, 点同士を結んだ辺からなる図のことです.　結ばれ方だけが問題なので, 辺が直線か曲線かなどは関係ありません. 具体的には, 道路地図や電気回路を想像してもらえればわかりやすいでしょう. このように、「つながり方」に着目して抽象化された点と辺の概念がグラフであり, グラフが持つ様々な性質を探求するのがグラフ理論です.

概念自体は簡単ですが, 実際にグラフを用いてどんな定理が示されるのでしょうか. 例をいくつか挙げてみましょう.

第 5 章では, 平面グラフと呼ばれるものを定義します. 平面グラフとは, どの 2 つの辺も, それらが接続する点以外では幾何学的に交差しないように平面に描かれたグラフのことです. この概念を用いると, 例えば, 多面体の頂点の個数を n, 辺および面の個数を m, f としたときに, $n-m+f=2$ が常に成り立つという, 有名なオイラーの公式は, 多面体を平面グラフに投影することで示すことができます. そしてオイラーの公式を用いると, 例えば, すべての点が 6 つ以上の点と結ばれているグラフは平面に描けないことが示せます. またこの章では, まず Kuratowski の定理と呼ばれる定理を認め, そこから, グラフが平面グラフとして描ける条件を複数の形で言い換えています.

また, 第 6 章では地図やグラフの彩色について調べています. 地図の各部分を, 隣接するどの 2 領域も同じ色にならないように 4 色で塗り分けることができるという定理が知られていますが（四色問題）, この章では, 5 色で塗り分けられるということが比較的簡潔に示されています. また, 後半では, 塗り分けられるかどうかという議論だけでなく, 何通りで塗ることができるかという議論も扱っています.

Hall の結婚定理もグラフ理論の有名な定理の一つです. 「女性が m 人いて, 何人かの男性と知り合いであるとする. すべての女性が知り合いの男性と結婚できるように, カップルが組めるための必要十分条件は,k を 1 以上 m 以下の任意の整数として, どの k 人の女性も合わせて k 人以上の男性と知り合いであることである. 」というのがこの定理の主張です. この定理を用いると, 例えばラテン方陣や, 輸送や通信などのネットワークの話に応用することができます.

予備知識ですが, 特に必要ありません. 本書はグラフ理論の入門書として好評を博しており, 初学者でも容易に読み進むことができるように書かれています. また, 例が豊富で, イメージも湧きやすく書かれているので, 数学書に慣れていない方に特におすすめです.

(文責：葛西 祐美)

3　素数と 2 次体の整数論 - 青木昇

■難易度の目安 ☆☆

「n を 3 以上の整数とするとき, $x^n+y^n=z^n$ をみたす正の整数の組 (x,y,z) は存在しない. 」

これは, フェルマーの最終定理という有名な定理です. 一般に, 方程式の整数解を考えるとき, 素因数を調べるのは有効なテクニックの 1 つですが, これを用いる際には式をできるだけ因数分解した形にしておくと考えやすいです. そこで複素数の範囲で考えると, 例えば $n=3$ の場合なら上の式は $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ を用いて

$$(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)=z^3$$

と因数分解できます. このとき方程式の係数は, もともと有理数の範囲に収まっていたのが因数分解により $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})=\{a+b\sqrt{-3}\mid a,b$ は有理数 $\}$ (これは 2 次体とよばれるものの 1 つです) の範囲まで広がりますが, それに対応して, 整数の世界を拡張した「2 次体の整数」(一般には「代数的整数」) の世界で素因数を調べるという方法をとります. 具体的には, 上の例なら $\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega\mid a,b$ は整数 $\}$ 上で考えます.

2 次体の整数の世界でも, 普通の整数と同様に加減乗の演算, 割り切る・割り切れるの関係, 素数の概念などが定義できますが, 普通の整数の世界なら成り立つ「素因数分解の一意性」が一般には成り立たなくなってしまいます (これがフェルマーの最終定理の難しいところの 1 つにもなっています). そこで登場するのがイデアルの概念です. イデアルとは, 数の代わりにその数の倍数全体を考えるという考え方で数の概念を拡張したものです. イデアルの世界で素数に対応するのが素イデアルで, イデアルの世界では素イデアル分解の一意性が成り立ちます. イデアルを考えることにより 2 次体の整数, 特に素因数分解に関して詳しく調べることができるようになります.

本書では, 2 次体の整数の導入や, どのような場合に素因数分解の一意性が成り立つかについて述べられた後, 応用としてフェルマーの最終定理の $n=3,4$ の場合や, 「任意の 4 で割って 1 余る素数は 2 個の平方数の和で表せる」というフェルマーの 2 平方和定理が示されており, セミナーの大きな目標となるでしょう. 余裕があれば素イデアル分解の一意性のところまで進めるとさらに代数的整数論の面白さが分かると思います.

2 次体の整数論を勉強するのに必要な初等整数論も前半で詳しく解説されており, 少し用いられている群や環の知識も付録にまとめられているので, 予備知識は不要です. 整数論に興味のある皆さんをお待ちしております.

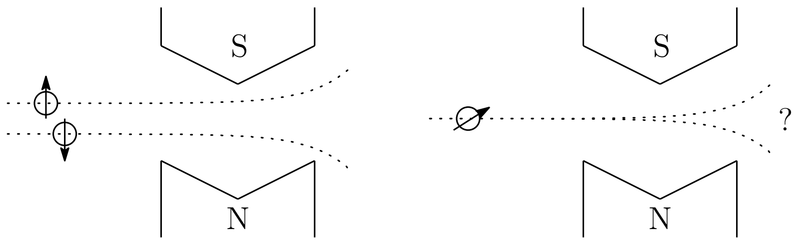
(文責：中川 雅洋)

4　線形代数と量子力学 - 竹内外史

■難易度の目安 ☆☆

量子力学は現代物理学の根幹にある学問です. 電子や原子核といった微小な世界における, 私たちの日常の感覚とは食い違った不思議な現象を量子力学で説明することができます.

その一つに, 「シュレーディンガーの猫」という話でよく知られる「状態の不確定性」があります. 電子はスピンという向きを持っており, その結果として小さな磁石になっています. したがって, 電子に図のように磁石を近づけると, 上向きの電子は上に, 下向きの電子は下へ曲がります. では, 中途半端な向きの電子は, 中途半端に曲がるのでしょうか？実は, どのような向きの原子も, 完全に上に曲がるか, 完全に下に曲がるかのいずれかになります. しかし, どちらに曲がるかは, 実際に測定してみるまで (わからない, のではなく) 決まっていません. これが不確定性です.



このような量子的な状態を記述するのに, 線形代数が用いられます. 線形代数はベクトルや行列を取り扱う学問です. 数学的には, ベクトルは和と定数倍を持つ数学的対象, 行列はベクトルの変換として定義できますが, 量子力学においては物理的な状態をベクトルで, 状態の測定を行列で表すことができます.

例えば, 上向きの電子を x 軸で, 下向きの電子を y 軸で表すとしましょう. このとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ上向き, 下向きの電子をあらわす確定状態となります. x 軸にも y 軸にも平行でない $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ といったベクトルは不確定状態となります.

しかし, 確定状態かどうかは, どのような測定をするかにより変わります. 磁石を上下からではなく, 左右から近づけた場合, 今度は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は確定状態になり, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は不確定になる, といったことがありえてしまいます！

量子力学では, 測定を行列を用いて表すことで, どのようなベクトルが確定状態となるのかを定式化することができるようになります. そして, 行列の掛け算が交換できないという性質から, 2 つの測定について同時には確定状態にならないという「不確定性関係」が導かれます.

この本は, 第 1 章が複素数を係数とするベクトルや行列などの線形代数の解説に充てられ, 第 2 章においてスピンや不確定性関係などの量子力学への応用となっています. 第 1 章の内容は多岐に渡るので, 第 2 章で何を学びたいかに応じて必要な知識を習得し, 数学と物理の両面に接するのが本セミナーの目標です.

予備知識としては複素数の計算を仮定します. ベクトルや行列の計算もある程度知っていることが望ましいでしょう.

(文責：久良 尚任)

5　複素関数入門 - 神保道夫

■難易度の目安 ☆☆

この本は「複素解析」という分野の入門書です. 高校で学ぶ微積分は, 実数に対して定義され実数値をとる関数（実関数）を扱いますが, その定義される値およびとる値を複素数に拡張したものを複素関数と言います. その複素関数の微積分を考えるのが複素解析という分野です.

実関数 $f(x)$ が微分可能であるとは, 定義域に含まれるすべての x について極限 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ があることでした. また, この極限 $f'(x)$ を x の関数とみなして $f(x)$ の導関数というのでした. $f(z)$ が複素関数の場合でも, 実関数の場合と同様に微分可能性や導関数が定義されます. ただし, 複素関数の場合は $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ という極限において h を 0 に近づける方法が, 実関数の場合より多いため (という言い方はあんまり正確でないかもしれませんが, 複素数は複素平面で表されるように 2 次元的に広がっていることが関係して), 複素関数に対する微分可能という条件は実関数の場合よりもかなり強くなります. 微分可能な複素関数は正則関数とよばれ, 様々な強い結果が成り立ちます. 例えば正則関数は 1 度だけでなく, 何度でも微分できることがいえますし, ある点の近傍での値が分かるだけで他の部分での値も決まってしまいます.

複素関数については, 複素平面上の曲線に沿った積分を考えることができます. これは実関数の定積分の拡張になっています. 特に, 正則関数でこのような積分を考えると様々なよい性質が成り立ちます. その応用として, 実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ や $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin^2 x}\,dx$ $(a>0)$ を簡単に計算することができます. これらの関数の積分を考えるときには, 関数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ における点 $z=0$ のように定義できていない点 (特異点) の周りの情報 (特に留数とよばれる値) を調べることが鍵となります.

セミナーでは, 留数を使ってある種の積分が求まるという定理 (留数定理) を目標にしたいと思います. 余裕があれば, 発展的な話題として無限和や無限積による三角関数の表示についても読み進めることができるかもしれません. 予備知識としては, 高校で習う程度の複素数・微積分の知識を仮定します.

(文責：峰岸 龍)

6　曲線と曲面の微分幾何 - 小林昭七

■難易度の目安 ☆☆☆

曲線や曲面の各点での「曲がり具合」を測るにはどうすればよいでしょうか. 例えば, 半径 1 の円と半径 2 の円を比べると, 局所的な「曲がり具合」は半径 1 の円の方が大きいと言えます. このように, 同じ円という図形でも「曲がり具合」は異なるので,「曲がり具合」をきちんと定義するには「長さ」の概念が必要だろうということが分かります. 曲がった曲線の「長さ」を測るにはどうすればよいかというと, 各点での接ベクトル (接線方向のベクトル) の長さを定めて積分すればよい, というふうに考えることができます. このように, 各点での接ベクトルに対して「長さ」が定まっているような図形 (曲線, 曲面) を調べる学問が微分幾何です. この接ベクトルの「長さ」を用いて, 曲線や曲面の局所的な「曲がり具合」(数学用語では曲率といいます) を定義することができるのです.

曲率にかんする微分幾何の重要定理として, Gauss-Bonnet の定理というものがあります. この定理の主張は, 大雑把に述べると「曲面の各点での曲率を足し合わせると, その曲面のオイラー数と等しくなる」というものです. このオイラー数というのは, 曲面の大域的な形状から定まる量で, 曲率などの微分幾何的な情報とは関係なく定義されるものです. 多面体 (各面が多角形でできた立体図形) を例にとって考えてみましょう. 各頂点での「曲がり具合」(とがり具合) として, $1-\frac{(\text{その頂点に集まる角度の和})}{360^\circ}$

という量を考え，これをすべての頂点について足し合わせてみてください．例えば正多面体でやってみましょう．2 になるはずです．これは，球面と同じ形状を持つ（柔らかい素材でできていると思えば球面に変形できる）多面体ならいつでも 2 になります．この 2 は球面のオイラー数なのです．興味のある人はこの事実の証明を試みてください.（実はこの事実はオイラーの多面体定理そのものです.）

本書は 5 章からなり，1,2,3 章では豊富な具体例に触れつつ曲線，曲面の微分幾何的な枠組み（接ベクトルの「長さ」の概念）の導入，曲率の定義，計算などを行います．そして 4 章で Gauss-Bonnet の定理を扱います．ここまで進むことを目指したいと思いますが，前半の方で具体例なども丁寧にやると 4 章まで進めないかもしれません.

予備知識としては，高校で学ぶ微分積分および行列（せいぜい $2, 3$ 次正方行列）の扱いを知っていれば問題ありません.

(文責：関 典史)

7 Integer Partitions - George W.Andrews, Kimmo Eriksson

■難易度の目安 ☆

この本のテーマである「整数の分割」とは, 1 つの正整数をいくつかの正整数の和で表す方法のことです. 例えば, 4 は $4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$ の 5 通りで表せます. これらが 4 の分割です.

このように, 整数の分割自体は単純な概念ですが, 実は面白い性質をたくさん持っています. 例えば簡単なものとして, Euler の恒等式「任意の正整数 n について, n の奇数のみによる分割と, 相異なる数のみによる分割の個数は等しい」などが挙げられます. このように, 「n の条件 A を満たす分割と条件 B を満たす分割の個数が等しい」という形をした主張を「分割恒等式」とよびます. この本ではまず, 「条件 A を満たす分割の集合」と「条件 B を満たす分割の集合」の間に一対一対応を作る全単射法や, Ferrer 図形と呼ばれる図形で整数の分割を表現し, その図形上の操作を考えることで等式を示す方法で, いくつもの分割恒等式が証明されます.

しかし, すべての分割恒等式がこのような初等的方法によって簡単に示されるわけではありません. そこで, 整数の分割をもっと分かりやすいものに置き換えることを考えます. 例えば, 6 以下の偶数と奇数とをそれぞれ 1 個ずつ含む分割をすべて求めたいと思ったとしましょう. それらの分割は, 次の多項式の積の中に自然に現れてきています.

$$
\begin{aligned}
&(q^2+q^4+q^6)(q+q^3+q^5) \\
&= q^{2+1}+q^{2+3}+q^{2+5}+q^{4+1}+q^{4+3}+q^{4+5}+q^{6+1}+q^{6+3}+q^{6+5} \\
&= q^3+2q^5+3q^7+2q^9+q^{11}
\end{aligned}
$$

これは非常に単純な例ですが, この考え方を拡張することで, 分割の情報を記憶させておく役目を果たすベキ級数である, 母関数というものが考えられます. これにより, 今まで組合せ論的対象だったものが, 級数の代数的操作に帰着することによって扱いやすくなります.

この本では, 母関数の手法と分割に関する考察を組み合わせることで, Gauss 多項式や Rogers-Ramanujan の恒等式など, 分割の理論の入門的な部分を学ぶことができます. さらに, 数学的な内容だけでなく, 過去の数学者たちによってどのような予想が立てられ, どのような試行錯誤が行われてきたのか, といった歴史的な部分にも触れることができるので, 味わい深い一冊となるでしょう.

この本を読むにあたって, 予備知識は特に仮定しません. 数学書を読み慣れていない人でも, パズルのように楽しく読み進めていけると思います.

(文責：山下 真由子)

8　A Course in Arithmetic - Jean-Pierre Serre

■難易度の目安 ☆☆☆

本書は 7 章からなり, 整数論の代数的な取扱いについても, また解析的な取扱いについても触れています. そのうち, 今回のセミナーでは「保型形式」をテーマとする第 7 章を扱う予定です.

本書で扱う保型形式とは, 大まかに言えば, 複素上半平面 $H = \{z = x + iy | y > 0\}$ 上の関数 f であって, $ad - bc = 1$ なるすべての整数 a, b, c, d に対して

$$f(z) = (cz + d)^{-2k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

という関数方程式 (k は「重さ」とよばれる整数です) をみたすもの, として定義されます. (実際には「保型形式」とはもっと一般的な対象です. 本書で扱われているのはそのうち最も簡単なタイプの保型形式に相当します.)

保型形式は解析的な色合いの濃い対象ですが, 「素数の代数的な性質を集めて作られるある種の L 関数は, 保型形式から作られる」という予想 (Langlands 予想) があるなど, 代数と解析を結ぶ架け橋として数論的にも大変重要な対象と考えられています. Fermat 予想の解決などの近年の重要な結果もここで述べたことの研究によるもので, 保型形式は現代整数論のまさに中心的なテーマの 1 つとも言えます.

本書では, 上述のように, 最も簡単なタイプの保型形式を論じており, 重さ k のものをすべて求めたり, それから作られる L 関数の様子を調べるということが主な内容です. 基本的な複素解析以外をほとんど用いずに保型形式の初歩を論じており, 本書のこの章は, 保型形式の入門的な解説書として高く評価されています.

内容の紹介は以上です. 次に本書を読む上での予備知識について説明します. 複素解析の基礎, 具体的には

- 複素数 z に対する指数関数 e^z
- 「正則関数」「有理型関数」「極」などの言葉の意味や簡単な性質
- 基本的な無限和の扱い

などが必要となります.

これらの予備知識についてはセミナー初日に担当チューターが簡単に説明しますが, 1 からすべて証明するということはせず必要な定義や結果を整理する程度になります. そのため, 本書に興味のある方は事前にある程度複素解析について勉強しておいた方が良いと思います.

「どうやって勉強すればいいのかわからない」という方は, 少し大きめの本屋や図書館などで「複素解析」「複素関数論」などという言葉がタイトルに入っている本を探して, そのうち一番読みやすそうな本を読み進めてみてください. 所々消化できない部分があっても, 雰囲気を掴んでおけば大丈夫でしょう.

(文責：清水 元喜)

9 Complex Algebraic Curves - Frances Kirwan

■難易度の目安 ☆☆☆

代数曲線とは, 大まかに言えば, ある多項式 $P(x, y)$ の値を 0 にするような点 (x, y) の全体のことです. 直線や円, 放物線や双曲線などは高校でもおなじみの代数曲線です. これらは次数が 1 ないし 2 の（つまり, 1 次や 2 次の多項式で定義される）曲線ですが, もっと次数の高い曲線もあります.

ただ高校の数学では x, y の値が実数である点のみを考えていたと思いますが, より広く x, y が複素数である点を考えることにし, また多項式の係数の範囲も複素数まで広げることにしたのが, 複素代数曲線です.

複素数の範囲で考える利点のひとつには, （実数のときと違って）代数方程式が必ず解をもつことがあります. 例を挙げると, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ で定まる曲線と $x^2 + y^2 - 1 = 0$ で定まる曲線は実数の範囲では様子が異なります（前者は空集合になってしまいます）が, 複素数の範囲で考えることにより統一的に扱うことができます.

本書では, 複素代数曲線をさまざまな視点から研究します. その一部を紹介します.

・代数的な話…… d 次の曲線と d' 次との曲線との交点は dd' 個以下であるが, 「重複度」込みで数えるとちょうど dd' 個であること（「ベズーの定理」）を示します.

・幾何的（位相的）な話…… 曲線がどのようなかたちをしているかを考えてみましょう. 複素曲線は（実）4 次元の空間の中の（実）2 次元の図形なので, 実曲線の場合のようにグラフを描いて考えることは困難です. 複素代数曲線は「穴のいくつか空いた浮き輪」のような形をしていることを（穴の数がいくつになるかも含めて）証明します.

なお, これらの話を正確に（かつ自然に）展開するには, 曲線に「無限遠点」とよばれる点をいくつか付け加えることが必要です. このあたりのこともこの本で説明されています.

この本では, 微積分の初歩（偏微分など）, 位相空間論の初歩（コンパクト性, ハウスドルフ性, 商位相など）を仮定しています.

(文責：滝聞 太基)