2013年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の10冊です.

1. トーリック多様体入門―扇の代数幾何 - 石田正典
2. 物理現象のフーリエ解析 - 小出昭一郎
3. 天書の証明 - M. アイグナー, G.M. ツィーグラー
4. 組みひもの数理 - 河野俊丈
5. ガロア理論講義 - 足立恒雄
6. 超積と超準解析 - 斎藤正彦
7. Introduction to Analytic Number Theory - Tom M.Apostol
8. Finite Fields and Applications - G. L. Mullen, C. Mummert
9. Algebraic Topology - William Fulton
10. The Probabilistic Method - Noga Alon, Joel H. Spencer

洋書を読むにあたって

7, 8, 9, 10は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから1冊ずつ内容を紹介していきます. なお, セミナーで本を担当する人と, 紹介文を書いた人とは異なる場合があるのでご了承ください.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです :

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

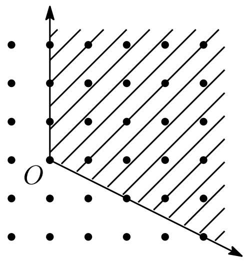
☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

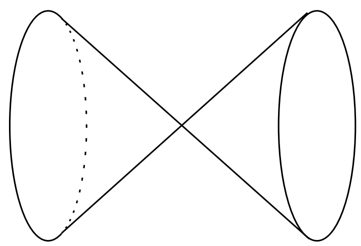
もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

1 トーリック多様体入門—扇の代数幾何 - 石田正典

■難易度の目安 ☆☆☆

トーリック多様体は, (複素数体 $\mathbb{C}$ 上の) 代数多様体とよばれるものの一種です. 代数多様体は, 大雑把にいうと多項式の零点の集合として定義されます. 代数多様体を調べる分野は代数幾何学とよばれており, 古くから研究され現在に至るまで非常に豊かな発展と広がりを見せています. トーリック多様体とは, 扇というものから作ることのできる代数多様体のことで, 扇とは実ベクトル空間 (例えば平面 $\mathbb{R}^2$ や空間 $\mathbb{R}^3$) の中の格子点 (整数座標の点) によって作られる錐体からなる集合のことです. したがって扇は組合せ論的な対象であると言えます. トーリック多様体を考えることの利点は, 代数多様体として (つまり方程式で定義された図形として) 直接扱うよりも, 扇として扱うほうが簡単であるということにあります. 代数多様体に対して一般に定義される諸性質 (非特異性, コンパクト性, 射影的, etc) が, トーリック多様体に対しては扇の組合せ論的な性質として解釈できるわけです. 一つ例を見てみましょう. 左の図の錐体に対応するトーリック多様体は $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 = yz\}$ となり, これは図示すると右の図のような円錐面になります (本当は $\mathbb{C}$ 上で考えていますが $\mathbb{R}$ 上かのように図示しています).





この代数多様体において $(0, 0, 0)$ という点は特異点になります (特異点とは, 直感的にいうとそこでの接平面が定まらないような点のことです). 実はこの特異点があるという性質は, 錐体を作っているベクトルが $(2, -1)$ と $(0, 1)$ の 2 つであるということからわかります. さらに, 特異点の解消とよばれる操作も錐体に対する操作によって行うことができます.

本書は, 前半では代数多様体を持ち出すことなく扇についての諸概念の定義, 諸性質の証明が行われており, 後半で扇からトーリック多様体を作る方法, および扇の性質と代数多様体の性質の対応が述べられています. そのため前半は線形代数の知識があれば十分読み進められます. 線形代数についてはセミナーの最初にチューターが解説することになると思います. セミナーでは, 前半の扇の理論を学ぶこと, 扇とトーリック多様体の対応が大まかに理解できることが目標なるかと思います (後半は代数多様体を扱うため, 完全にフォローするには環論や位相空間論など少し予備知識が増えるので読み切るのは大変かもしれません).

扇という一見代数多様体とは関係なさそうに思われる単純な組合せ論的対象から代数多様体が作れられること, 代数多様体の重要な性質が扇の性質として理解できることは非常に面白いと思います. 興味を持ったら是非勉強してみましょう.

(文責 : 関 典史)

2　物理現象のフーリエ解析 - 小出 昭一郎

■難易度の目安 ☆☆

フーリエ解析とは, 複雑な関数を周波数毎の成分に分解することで, 扱いやすい形の関数で記述し直す手法です. たとえば, 楽器は空気に特定の形の振動 (時刻 t の関数) を与えることで音を発しますが, この振動はフーリエ変換によっていくつかの正弦波の重ね合わせに分解することができます. 分解によって得られた成分は, どのような周波数の波がどれくらいの大きさで含まれているのかという情報 (周波数 k の関数) を表現するものとなります. とくに, ヒトの耳, 脳はこの変換に相当する処理を行うことで, 楽音の高さや音色を知覚しているといわれます. このように, 自然界に見られる時間領域の関数には, 周波数領域の関数として表現し直すことで, 特徴を捉えやすくなったり解析がしやすくなったりするという例が多々あります.

フランスの数学者 J. B. J. Fourier(1768 ∼ 1830) は, 微分方程式を解くための手段として, 周期関数を三角関数の無限級数で表すフーリエ級数展開を考案しました. さらに, これを周期関数から非周期関数の場合に拡張したものはフーリエ変換と呼ばれ, 関数 $f(x)$ のフーリエ変換は次のように表されます :

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x.$$

このようにして定義される関数 $F(k)$ は一般に複素関数であり, 元の関数 $f(x)$ に含まれる波数 k の周波数成分の振幅と位相を表します.

本書では, 第 1 章でフーリエ級数を導入し, 第 2 章で多次元のフーリエ変換に拡張します. 第 3 章以降では, 実際にフーリエ級数やフーリエ変換を利用して, 様々な形の微分方程式を解いていきます. 定理を提示し証明するという数学書の基本的な形式に則った本ではなく, 具体例として多くの物理現象を扱うことで, フーリエ解析を 1 つの幅広い手法として身に付けることが期待できる本となっています. そのためフーリエ変換の数学的な性質に深く踏み込むことはしていませんが, 数学書に馴染みのない人にも読み進めやすい構成であるともいえるでしょう.

予備知識としては, 微積分の基礎 (高校範囲程度, 主に指数や三角関数の微積分) と複素数を仮定します. また, 高校物理で習う範囲の振動や熱伝導, 電気回路, 光の干渉などについての知識があれば, 本書をより楽しむことができると思います.

(文責：大屋 瑶子)

3　天書の証明 - M. アイグナー, G. M. ツィーグラー

■難易度の目安 ☆

この本のタイトルにある「天書」は "The Book" を日本語に訳したものです. 一般的には, キリスト教の聖書を表わすことが多いようです. しかし, 生涯のすべてを数学に捧げた伝説の数学者ポール・エルデシュが "The Book" と言って指し示したのは, 神様が持つ, 数学の定理の完璧な証明が書き記された, そんな真実の書のことです.

エルデシュは, 数学の様々な分野の問題を驚異的なスピードで解決していき, 生涯で 1500 もの論文を発表しました. その原動力は「天書」の存在に対する固い信条だったのではないでしょうか. 特に, 素数定理に初等的な証明を与えたことや, 組合せ論において様々な新しいテクニックを生み出したことによる功績が凄まじく, あたかも「天書」からとってきたかのような美しい証明を次々と編み出しました.

この本の誕生は, 著者たちがエルデシュに, 「天書」のごくごく近似的なものを作ってみてはどうかと提案したことに端を発しています. 本の完成の前にエルデシュは亡くなりましたが, 彼のアイデアが色濃く反映された本に仕上がっています. 数論・幾何学・解析学・組合せ論の各分野から美しい定理とその証明がたくさん紹介されていて, その数は 90 個にも及びます.

内容の一部を紹介しましょう.「どんな正の整数 n に対しても, n より大きく $2n$ より小さい素数がある」という定理 (ベルトランの仮説) は, 聞いたことがある人もいるのではないでしょうか. この定理はもともと 1850 年に証明が与えられましたが, その後ラマヌジャンが簡単な証明に書き換え, エルデシュが 2 項係数 ${}_{2n}C_n$ を評価する別証明を与えました.「天書の証明」にはエルデシュのアイデアによる証明が載っています. このようにエルデシュ本人による定理や証明が紹介されているのも, この本の魅力の一つではないかと思います.

この本は, それこそ聖書 "The Book" と同じレベルで普及させてすべての人に読んで欲しい, そんな一冊なのですが, 今回のセミナーでは主に数学書を読み慣れていない人を対象にしたいと考えています. ただ, ある程度数学を勉強している人にとってもこの本は読む価値があると思うので (例えば, トポロジーの定理である不動点定理にグラフの彩色を使った組合せ論的な証明があると聞いたら驚く人は多いと思います), 読みたいという希望が強くある場合はこの本を選択してもよいでしょう.

短く章分けがされていて, どこからでも読める仕様になっており, 図も豊富なので, 総じて読みやすい本です. 前提知識が必要なトピックもいくつかありますが (具体的には, グラフ理論の用語や線型代数の知識など), いずれもチューターが適宜解説するか, 解説のページが付いているので, それを参照することで間に合うのではないかと考えています.

(文責：峰岸 龍)

4　組みひもの数理 - 河野俊文

■難易度の目安 ☆

この本のテーマである組みひもとは, 図 1 のように n 本のひもがそれぞれ n 個の上端・下端に 1 本ずつつつながれた図形のことです (図 1 では $n = 3$). このとき, 図 1a と図 1b のように, 端点を固定したままひもを動かすことによってうつりあうものは同じ組みひもと考えます.

この本のもう一つの主役は結び目・リンク (絡み目ともいう) です. 3 次元空間内で 1 本のひもを絡ませ, 両端をつなぎ合わせたものを結び目といい, いくつかの結び目が互いに交わることなく絡み合っているものをリンクといいます. このひもは自由に伸び縮みするものとし, ひもを動かすことによってうつりあうものを同一視することにします. 結び目を平面に写しとった図 (射影図) を考えると, 同じ結び目同士の変形は平面上ではライデマイスター移動とよばれる 3 種類の基本移動の組み合わせによって表されます.

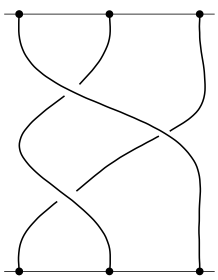


図 1a

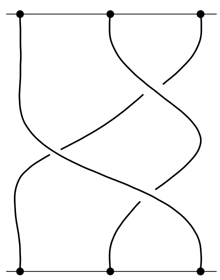


図 1b

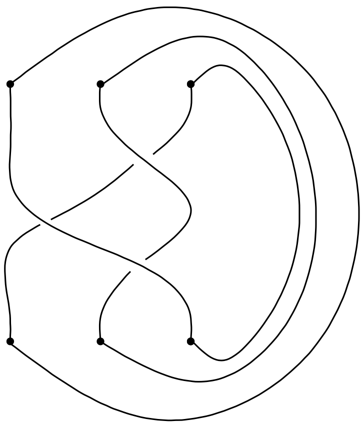


図 2

与えられた 2 つの結び目の射影図同士が同じ結び目であるか否かを判定せよ, というのは難しい問いですが, 結び目の射影図それぞれにある量 (多項式など) を対応させることを考えたとき, その量が 3 種類のライデマイスター移動によって変化しなければ, それは同じ結び目上では変化しないということを意味し, 結び目不変量とよばれます. そして (同じ結び目不変量をもつ結び目の射影図同士が同じ結び目とは限りませんが), 結び目不変量が異なる結び目の射影図同士は異なる結び目であることがわかるので, 結び目不変量を見つけることは結び目を分類するために大切なことです. この本では, リンクに向きを付けたり, 上で定義した組みひもとの対応を考えたりすることにより, 実際にいくつかの結び目不変量を構成します (図 2 は図 1b に対応するリンク).

ほかにも, 組みひもを用いたゲームや, 行列を用いた組みひもの表現など, 組みひもに関するトピックが多く扱われていることがこの本の特徴です.

この本を読むにあたって, 群の定義や行列の演算を知っていると少し読みやすいですが, 必要に応じてチューターがセミナー中に説明するので, 予備知識は特に仮定しません. また, この本では難しい証明はほとんど扱われておらず, 直観的に書かれている部分が多いので, 数学書に馴染みの薄い人でも読みやすいかと思います.

(文責：安田 真由美)

5　ガロア理論講義 - 足立恒雄

■難易度の目安 ☆☆

これを読んでいる皆さんなら, 中学校で習う 2 次方程式の解の公式はよく知っていることでしょう. そして, 中には 3 次方程式の解の公式を知っている方もいることでしょう. では, 4 次方程式の解の公式はどうか？何次方程式の解の公式まで存在するのだろうか？答えを先に言ってしまえば, 4 次方程式の解の公式までが存在していて, 5 次以上の方程式の解は方程式の係数の四則演算と冪根で一般には表せないことが知られています. このような明快な答えを与えたのが, 本書で扱うガロア理論です.

ガロア理論を学ぶにあたっては, 群や体といった代数系と, それらの間の代数的構造を保つような写像とを扱って行くことになります. 具体的に体の拡大の例を挙げると, たとえば体に対してその体を含むより大きな体を考える, 体の拡大と呼ばれる操作があります. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ に対し, $\sqrt{2}$ を加えて, しかも加減乗除について閉じているようにした体 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ を作る操作が体の拡大の一例です. 耳慣れない単語がたくさん登場してきて怯んだ人もいるでしょうが, 本書では初学者にもイメージしやすいようにというコンセプトで丁寧な説明がなされているので, 高校範囲の知識でも十分読めます. 例えば, 本書の冒頭第 1 章では、いきなり代数系の抽象的な話に入るのではなく, 「ギリシャの 3 大作図不能問題」(ある円が与えられて, それと同面積の正方形はコンパスと定規で書けない, などなど) から問題を提起して, ガロア理論の理解のカギとなる体の拡大や拡大次数についての導入がなされており, 第 2, 3, 4 章での厳密ですが抽象的でイメージしづらい定義の上での議論を理解する上での大きな助けとなっています.

第 5 章においては, それまで積み上げてきた「前準備」を全て組み立てて, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ から, 体の拡大の中間体がガロア群の部分群と一対一対応するという大定理の証明へとまとめあげていきます. 実は筆者も高校時代ガロア理論を夏季セミナーで学んだ一人なのですが, それまで意味が分からなかったものが意味のある議論にまとめあげられていくこの過程にエキサイトしました.

本セミナーにおいては, 第 6 章にある 5 次方程式の解の公式の非存在性の証明を大目標として進めていきますが, もし進度に余裕があれば, 正 n 角形が定規とコンパスで作図可能な時の n の必要十分条件など, ガロア理論を応用したさまざまな定理を「おまけ」として扱う可能性もあります. この本を始め, 夏季セミナーの本の中には普通全章終わらせることを目標としていないものも少なくないのですが, 持ち帰ってから期間中に扱えなかった章を読んで楽しむという点においても, よい一冊だと思います.

また, この本のもう一つの特徴として, 演習問題と簡単な解説が載っているということも挙げられます. ですので, 自分で考えながら内容を理解していく癖をつけるいい練習にもなるかもしれません. さらに, 代数の基本的なところから丁寧に解説がしてあり, 初学者にも分かるようなものですので, 予備知識については中学校で習う集合の話程度が分かっていれば, チューターの説明で十分補えると思います. 興味を持っていただいた皆さん, お待ちしております.

(文責：小松 大樹)

6　超積と超準解析 - 斎藤正彦

■難易度の目安 ☆☆☆

動いている物体の「速さ」とは何でしょうか. 「無限に短い時間の間に進む距離とその時間の比」というのが素直な答ですが, これには「無限に」という言葉によるごまかしが行われていて, 厳密には, 微分を用いて定義されます.

高校で学習する極限, 微積分などに関しては, このような「ごまかし」が行われています. 例えば関数が連続であることには「グラフがつながっていること」, 極限に関しては「限りなく近付く」のように直感的な説明しかされません.

大学に入ると, これらのことを「イプシロン・デルタ論法」と呼ばれるものを使って厳密に定義するやり方を習います (例えば実数から実数への関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるということは, 任意の正の数 ε に対し, ある正の数 δ が存在して $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つこと, と定義される). この方法を使えば確かに微積分・極限などは厳密に定義できるのですが, 「0 にいくらでも近いが 0 でない数」という「無限小」 (つまり, 素直な考え方に現れた「無限に短い時間」の長さ) を直接扱ってはおらず, 「正の実数 ε を勝手に選んでよい」というアイデアで間接的に無限小を考えています.

本書で扱っている「超準解析」は, 「イプシロン・デルタ論法」とは別の方向性として, 無限大・無限小・極限などを直接的に, しかし厳密に扱う理論です. この理論のもとでは, 無限大や無限小を普通の実数と同じような数学的実体としてとらえることができ, 四則演算も自由に行えます. このように実数を拡張したものを「超実数」とよび, 超実数は, 意外にも (普通の) 実数の持つ性質の多くをみたします. このことは, 「移行原理」とよばれ, 通常の実数の世界での命題を適切に超実数の世界に移してやれば, 元の命題が成立することと移した先の命題が成立することが同値となっているのです.

また, 超準解析は「イプシロン・デルタ論法」とは別の方向性といいましたが, 両者は関係がないわけではありません. 通常の世界と超準的な世界が移行原理によってつながることと別に, 超実数全体に含まれている普通の実数の部分に着目すると, 超準的な世界で「普通の実数」を考えることが可能となります. これによって, 実は, イプシロン・デルタ論法によるものと同じ微積分を別の視点から見ることができます.

本書ではまず, 1 章で超積 (実数に対する超実数にあたるもの) を構成し, 連続・微分可能などという概念を超実数の言葉で書き換えて, いくつかのよく知られた性質を超実数を使って示します. 2, 3 章では, 「モデル」という概念を使い, 移行原理などの「通常の世界と超準的な世界の関係」を, 「論理式の解釈の変更」として捉えます. 4 章では, 2, 3 章の結果を応用し, 位相に関連するよく知られた命題である, チコノフの定理と, ハール測度の存在を証明しています.

セミナーでは, 1 章から順に読み進めて, 3 章の終わりまで読むのを目標にしようと思っています. 4 章に関しては, 位相について予備知識のある生徒が多ければ応用として面白いので 3 章を多少とばしてでも読めるとよいかなと思います.

予備知識は, 基本的には高校範囲の微積分, 極限を知っていれば十分です. ただ, 「イプシロン・デルタ論法」と対比している部分もあるので, 大学初年級で習うような解析の基礎について知っているとより分かりやすいと思います.

(文責：片岡 俊基)

7　Introduction to Analytic Number Theory - Tom M.Apostol

■難易度の目安 ☆☆☆

整数論は, 代数学, 幾何学, 解析学などの様々な手法や問題意識が交錯する数学の分野です. 本書では, 解析学を通して整数論を深めていきます (解析学とは, 極限や関数の微積分を扱う分野です).

整数論で登場する多くの概念, たとえば約数, 素因数, 素数の個数や和といった情報は, 一般には非常に不規則な挙動を示します. しかしながら, 十分大きな区間においてこれらの平均的な振る舞いを調べるとその振る舞いはより「規則的な」関数で近似されることがわかります. たとえば x を十分大きな実数としたとき,

- x 以下の正の整数について, その正の約数の個数の平均は, 約 $\log x$ である.
- x 以下の正の整数のうち, 素数の占める割合は, 約 $1/\log x$ である.
- x 以下の無作為に選んだ 2 つの正の整数が互いに素である確率は, 約 $\pi^2/6$ である.

などの結果が知られています. このように現象を大局的な視点で近似的に捉えるのが, 解析的手法の特徴です. 整数論的関数の和を取り扱うテクニックや, 関数同士の関係を学びながら, これらの問題に取り組んでいきましょう.

素数の分布を解明するには, ゼータ関数とよばれる関数を調べることが重要になります. 代表例である Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

を考えてみましょう. 正の整数全体について簡単な関数を足し合わせており, このような関数の近似的な振る舞いは, 解析的に調べやすいといえます (ただし解析接続という手法で定義域を拡張すると非常に難解になり, Riemann 予想とよばれる未解決問題に繋がることを注意しておきます). この関数は, Euler 積とよばれる等式

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \text{は素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

により, 素数と結びついています. したがって, この関数を調べることで, 「素数の個数を数える」「素数全体について簡単な関数の和を考える」など, 素数の分布に関する問題に近づくことができるのです. その一例として本書では, Riemann のゼータ関数と, その変種を考えることで,

> Dirichlet の算術級数定理 : 任意の互いに素な正の整数 a, m に対し, $p \equiv a \pmod{m}$ をみたす素数 p が無限に多く存在する.

が (より精密な評価とともに) 示されており, セミナーにおける大きな目標の 1 つとなるでしょう.

予備知識としては, 初等整数論 (素数の性質や合同式) に関する基礎知識があること, 高校レベルの微積分や極限の考え方に慣れていることを仮定します. 整数論の発展的な話題に触れてみたい生徒を歓迎します.

(文責 : 西本 将樹)

8 Finite Fields and Applications - Gary L. Mullen, Carl Mummert

■難易度の目安 ☆

本書はタイトル通り, 有限体と, それの数学の諸分野への応用について扱っています.

まず「体」とは, 大雑把に言うと「加減乗除が定義できる」集合のことを指します. たとえば, 整数全体の集合は体にはなりません ($3 \div 5$ など, 割り算の結果が整数にならないことがあるため). 一方, 有理数全体の集合や実数全体の集合は体となります. これらの体は, その要素が無限個ありますが, 今回主に扱う「有限体」は今見たものとは違い, 体のうち要素が有限個のものを指します. 有限体の例としては, F_p, つまり整数のうち $\mathrm{mod}\, p$ (ただし p は素数) で等しいものを同一視したもの, が挙げられます. 実際, F_p では加減乗の他に割り算も定義できるため体となっており, また要素が p 個なので (同一視のため) 有限体とわかります. 実は有限体の要素は必ず素べき個であり, また要素の個数が同じ体どうしは同型, つまりその構造が一致します. これらの事実は本書で証明されています.

また本書での有限体の応用として, 符号理論と暗号理論が主に扱われています. 何らかの情報をコンピューターで他人に送るとき, それらは処理しやすい形に「符号」化されます. その際この符号化には, 効率のよさと, またもし間違いが含まれていたとしても, それを発見し修正できるシステムが求められます. こうした性質のよい符号を生み出すのが, 符号理論の大きな目的といえます. また, インターネットで情報を送るとき, 他の誰にも知られず当事者のみが共有するために「暗号」が必要不可欠です. ネット上の安全性のさらなる強化のために, 暗号理論が発展してきました.

さて, 今述べた 2 つの理論は計算機科学の分野のものです. 要素が有限個なため計算機で計算可能な有限体は, 計算機科学において扱いやすい対象といえます. 本書では実際に有限体が使われている符号・暗号の例が多く挙げられています. 有限体という代数学上の抽象的なものが, 現実世界に深くかかわる理論においてどのように用いられているかを見ていく, というのがこの本の主目的といえるでしょう.

その他にも, ラテン方陣や数独, さらにブロックデザインなど, 組合せの分野における様々な事柄について, それらと有限体の関わりが紹介されています.

構成としては, まず 1 章で有限体の性質について触れています. その後, 2 章は組合せ分野, 3 章では符号理論, そして 4 章では暗号理論について, 各トピックに対する有限体の応用の様が述べられています.

さて予備知識ですが, 基本となる体などの代数学上の知識はおおむね本の後ろの付録に載っているため, 特に必要ありません. また, 各章末に演習問題がたくさん用意されているので, それらを解くことでより深い理解が得られるかと思います. 上で述べたように符号や暗号などの豊富な応用例があり, 読み物としての側面もあるので, 洋書を読んだことがないという人も楽しく読み進められると思います.

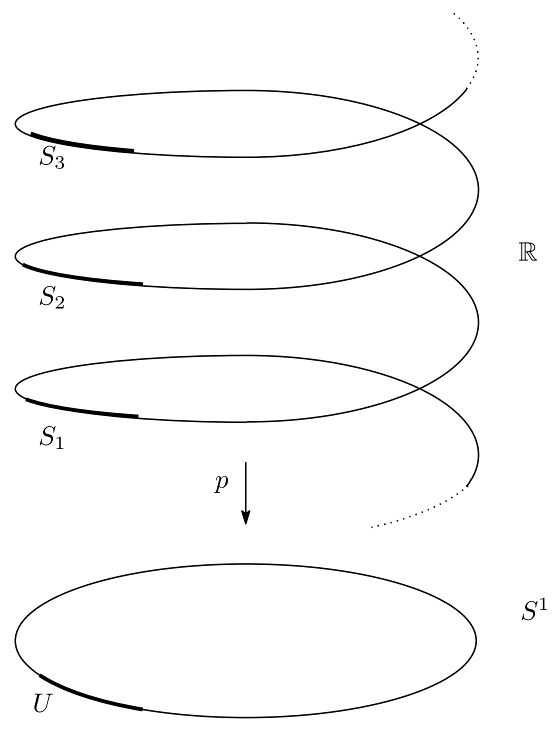
(文責：北村 拓真)

9　Algebraic Topology - William Fulton

■難易度の目安 ☆☆☆

代数的位相幾何学とは, 空間や空間の間の写像の性質をそこから取り出した "代数的なもの" を見ることによって調べる分野です. この本では代数的位相幾何学の様々な手法が紹介されているのですが, 今回のセミナーでは「被覆空間」と「基本群」との間の関係を取り扱っている 11 章から 14 章にかけての部分を読み進めたいと思います.

さて, では位相空間 Y が X 上の被覆空間であるというのはどのようなことでしょうか？厳密な定義はセミナーで学んでもらうことにして, ここではイメージだけを書いていきます. 実数 x に対して単位円周 S^1 上の点 $(\cos x, \sin x)$ を対応させる写像 p を考えます. 実数を数直線で表し, さらに半径 1 のらせん状に巻いて S^1 の上においたのが次の図です. このとき, S^1 の各点の「上」に $\mathbb{R}$ の点が必ずありますよね？といってもこれはただの全射ならいつでも成り立つ性質です. 注目すべきは, S^1 の各点の「周囲の様子」と, その点の「上」にある $\mathbb{R}$ の点の「周囲の様子」がそっくりである, という性質です. これが（厳密な言葉に言い換えると）「被覆空間」の定義になっています. X の被覆空間 Y はこのように, 各点の「周囲の様子」に注目すると X の性質をそのまま受け継いでいるので, では全体として X の性質をどのように受け継いでいるのだろう？Y としてはどのようなものが許されるのだろう？というのが中心的な疑問となります.



被覆空間（イメージ）

この疑問に対して強力な助けになるのが, 次のような「基本群」という “代数的なもの” です. 上の S^1 を例にとります. S^1 上のある 1 点を出発して, 円周上を 1 周して帰ってくる道と 2 周して帰ってくる道は連続的な変化で決して一致しません. 逆に, ある点を出発して半周したところで逆向きに元の点に戻ってくる道と, ある点上でじっとしているという道（これも立派な道です）は, 連続的な変化で（方向転換する点を徐々に出発点に近づけてやることで）一致します. 始点が同じで連続的にうつりあわない道たち全体は “掛け算” を定義することで, 基本群という代数的な対象とみることができます. 例えば, S^1 の基本群は整数全体の集合と同じ構造を持ちます（整数 n が S^1 を正の向きに n 周する道に対応します）.

そして実は, 「X 上の被覆空間」と「X の基本群の部分群」とは, （適切な条件のもとで）一対一に対応するのです. たとえば $\mathbb{R}$ は S^1 の基本群 $\mathbb{Z}$ の部分群のうち, 0 のみからなる群に対応しています. また, 「n の倍数全体」という $\mathbb{Z}$ の部分群には, 「n 周のらせん（の端点をつなげたもの）」が対応します. （なお, さらに驚くべきことにこの対応の仕方は体のガロア理論における対応の仕方ときわめて類似的ですので, 今回の夏季セミナーでは最終日の全体発表でお互いまったく異なる発表の最後に同じような図式に出くわしてびっくりする, ということになるかもしれません）.

この本を読むにあたっては, 群の定義と簡単な性質, および位相空間の用語への慣れが必要になります. これらの知識については初日にチューターが解説しますが, 特に位相の初歩についてはあらかじめ勉強して慣れておくことが望ましいです.

(文責：清水 元喜)

10 The Probabilistic Method - Noga Alon, Joel H. Spencer

■難易度の目安 ☆☆

本書のタイトルは「確率的手法」といった意味合いです. いわゆる「確率論」をメインに扱った本ではありません. 確率論の言葉や定理を, 組合せ論的な定理を証明するために利用してしまうのがテーマです.

確率的手法の著しい特徴として, 非構成的であるという点があります. 具体例を見てみましょう.

> 一辺 1 の正方形内に n 個の点を上手くとれば, そのうちどの 3 点を選んでも, 面積が $1/(100n^2)$ 以上の三角形が作られるようにできる.

このような定理を証明するにあたって, 「構成的」な方法と「非構成的」な方法があります. 構成的な方法は, n に対してなるべく具体的な式で点のとり方を提示し, 条件をみたすことを示すものです. 一方, 非構成的な方法は, 正方形内に適当に点をばらまいて適当に調整すれば条件をみたすことがある, というような議論を行います. どのような点のとり方が適切なのかは提示しません. 一見とても乱暴な議論のように思えますが, それを数学的に表すために確率論の言葉が有効なわけです. 証明の基礎となる事実は, 「ある値 X の期待値が 1 以上であれば, $X \geqq 1$ となることがある」といった非常に単純な評価です. どうやるかは知らないけれど存在は証明できる, という不気味な感じですが, 非構成的な証明は時に構成的な証明よりも簡単だったり, よりよい評価を与えたりすることがあるのです.

本書は, 単純な期待値計算で示す手法から始まり, 先ほど述べた「適当に調整」に対応する組合せ論的手法や, 確率論の発展的な定理を用いて議論を行っていく手法が紹介されています. そして, 先ほどのような幾何的な問題だったり, はたまた整数論の問題だったりも含めて, 適用例がたくさん紹介されています. 内容は非常に濃く, 高度な事項も多いため, セミナー中に読める部分はどうしても限られてしまうと思いますが, それでもいくつもの綺麗な定理・証明に触れられると思います.

予備知識としては, 高校数学程度の極限や微積分が十分に身についていることが望ましいです. 確率に関しては高校数学程度の知識があれば問題ありません. また, グラフが題材に挙げられている箇所が多いので, グラフ理論に慣れていると親しみやすいと思いますが, そうでなくても用語などをチューターが適宜補足して読み進めることができるでしょう.

(文責：保坂 和宏)