2016年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO 夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の 9 冊です.

1. 幾何の魔術 - 佐藤肇, 一樂重雄
2. 数を数えてみよう - 中島匠一
3. 双曲幾何 - 深谷賢治
4. ガロア理論講義 - 足立恒雄
5. 物理現象のフーリエ解析 - 小出昭一郎
6. 離散幾何学講義 - J. マトウシェク
7. 超幾何関数 - 原岡喜重
8. Topology from the differential viewpoint - John W. Milnor
9. Introduction to analytic number theory - Tom M. Apostol

洋書を読むにあたって

8, 9 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから 1 冊ずつ内容を紹介していきます.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです :

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

1　幾何の魔術 - 佐藤肇, 一楽重雄

■難易度の目安 ☆

みなさんは, 魔方陣を作ったことがありますか？

多くの人が, 幼いころに多かれ少なかれ魔方陣に触れたことがあるでしょう. 3×3 の魔方陣や, 4×4 の魔方陣であれば, 力ずくで作り上げることも可能です. しかし, 本書では $n \times n$ の魔方陣を様々な数学的アプローチにより作ることを目標としています.

皆さんがご存知の通り, 魔方陣とは正方形の方陣に異なる数を 1 つずつ, 縦の列も横の列もその和が等しくなるように配置したものです. 本書では, まずこれを組み合わせ論のみで考えることにより, 第 1 章で早々に奇数 × 奇数の魔方陣の作り方が示されます. しかし, 偶数 × 偶数の魔方陣はそう単純ではありません. 第 2〜4 章では, 偶数 × 偶数の魔方陣を作っていきます. ここからは, 幾何的なアプローチをとります. 幾何といっても, 中学や高校で慣れ親しんでいる幾何（ユークリッド平面における幾何）ではなく, 点が有限個であるような「平面」における幾何を考えていくことになります. 普通の考え方では, 有限個の点からなる集合を「平面」とみなすことはできません. しかし, ユークリッド平面と同様のいくつかの性質を持つ点と直線の集合である「アフィン平面」を考えると, 有限個の点からなる集合も「平面」と考えることができます. ここでは有限個の点からなるアフィン平面を考え, ユークリッド平面と同様に座標を導入します. この座標には, 有限個の数であり四則演算が自由に考えられるような有限体と呼ばれる数体系が用いられます. 更に「平行線に沿って数を並べる」などの幾何的な考え方で数を規則正しく配置することで, 偶数 × 偶数の魔方陣も, 第 1 章で用いたプロセスと同様にして作ることができるのです. 魔方陣を試行錯誤ではなく, 体系的に作れる喜びを味わうことができるでしょう.

第 5 章以降では, 魔方陣というテーマから離れ, 第 2 章〜第 4 章までで学んだアフィン幾何学を出発点として, 射影幾何学について考えていきます. 射影平面がユークリッド平面と大きく違うのは,「任意の 2 直線がただ 1 点で交わる」ところです. この違いが, 射影平面に特有の様々な性質をもたらしてくれます. 第 5 章以降では, この興味深い射影平面について学んでいきましょう. 第 8 章では, 射影幾何やアフィン幾何の様々な応用例が載っています. ここでは, 実験計画法やゲームの対戦相手の組み合わせ方など, 組み合わせ論と結びつく興味深いテーマが扱われています. セミナー当日は, 進度に応じて, その中からいくつか選んで読みたいと思います.

本書は, 副題に「魔方陣から現代数学へ」とある通り, 魔方陣という比較的親しみやすい題材を通して, アフィン平面や射影平面などの, 応用範囲の広い幾何学について学ぶことのできる本です. 説明は一つ一つ丁寧で, 誰でも知っている当たり前のことを出発点として, 様々な定理を証明しながら進めてくれます. 予備知識は中学校程度の数学を理解していれば十分です.

2　数を数えてみよう- 中島匠一

■難易度の目安 ☆

本書は, 「整数論」というその名の通り主に整数の性質を調べる分野を扱っています.

この本の特徴としてまず挙げられることは, ある一つの問題を解決することを目標として, ほぼ丸一冊かけてその目標を達成しているところです. 導入される概念や命題はほぼすべてその問題を解決することに役立つものであり, 「性質が次々と示されているが何に使うのか分からない」ということが起こりにくくなっています.

その目標とする問題というのは「フェルマー予想」に関連したものです. ご存知の人も多いかもしれませんがフェルマー予想というのは

n が 3 以上の整数のとき, $X^n + Y^n = Z^n$ をみたす正の整数の組 (X, Y, Z) は存在しない.

というものです. これは有名な超難問でフェルマーがこの予想を書き残した後 300 年以上経ってから解決されたわけですが, この本では $n = 3$ の場合を考えます. とはいっても, $n = 3$ の場合の証明をするわけではなく, 少し視点を変えてこの問題を眺めてみます. きちんと説明すると長くなってしまうので大まかに言うと, 通常は「正の整数の世界」で $X^3 + Y^3 = Z^3$ という方程式に解が存在するかどうかを考えていたわけですが, 本書では「素数 p で割った余りの世界」で解の個数を数えるということを考えるのです. （素数とは, 1 と自分自身以外に約数をもたない 2 以上の整数のことです. ）

たとえば, $p = 2$ の場合を考えてみましょう. $X^3 + Y^3 = Z^3$ が成り立つような X, Y, Z の偶奇としてはどのようなものがあり得るでしょうか. 少し考えれば分かるように, X, Y がともに偶数もしくは奇数の場合は Z は偶数になり, 片方が偶数でもう片方が奇数の場合は Z は奇数になります. つまり (X, Y, Z) としては (偶, 偶, 偶), (偶, 奇, 奇), (奇, 偶, 奇), (奇, 奇, 偶) の 4 通りが考えられるわけです. 本書ではこのようなことを一般の素数 p に関して考えます.

少し聞いただけでは何故このようなことを考えるのか分からないかもしれませんが, これは数学的に非常に意味のあることであり, その理由は序盤で解説されます.

本書のもう一つの大きな特徴としては, 例が多く挙げられていることです. 定理の主張と証明だけではなく, 定理が成り立っていることなどを多くの例で確認しています. これによって, 自分で手を動かし実際に計算してみることで定理の有難味がよりわかるようになるでしょう.

120 ページと薄めの本なので, セミナー期間中にほぼ読み終わることが出来ると思います. 予備知識はほとんど何も必要なく, 中学数学さえ知っていれば十分という程度です. 文字式と整数の簡単な計算が出来れば問題ありません.

整数が好きな人, 今まで数学書をあまり読んだことがない人にお勧めします. この本を読むことによって, たとえ本に例が書かれていなくても自分で例を考えたり, 概念が導入された動機を考えてみる癖をつけることができると思います.

3　双曲幾何 - 深谷賢治

■難易度の目安 ☆☆

皆さんは,「非ユークリッド幾何学」という言葉を聞いたことがあるでしょうか?

まずユークリッド幾何学というものがありますが, これはギリシャ時代のユークリッドがいくつかの公理を出発点としてまとめた有名な理論で, 普段学校で教わるような初等幾何のことと思ってかまいません. さて, ユークリッドが与えた公理の中に平行線の公理というものがあります. これは「ある直線とある点があったときに, その点を通りその直線に平行な直線が唯一つ存在する」 というものです. 実は, この公理が本当に公理として必要なのか (他の公理から導かれるのではないか) という疑問が投げかけられ, 長い間議論がされていました. そして, 最終的にはこの公理を満たさない「幾何学」が提示されることで解決にいたることとなりました. この「幾何学」を非ユークリッド幾何学といいます.

現在は, 非ユークリッド幾何学を考える際にはいくつかの方法があります. 本書では,「双曲幾何」とよばれるものを, 式の計算・座標や微積分にもとづいて展開していきます. これはより一般的な幾何学であるリーマン幾何学への入門を意図しています.

第 1 章ではまずリーマン球面の 1 次分数変換というものを考察し, 群と作用という数学の基本的な考え方が具体例を元に説明されます. 第 2 章では, 上半平面モデルと円盤モデルという 2 つの双曲幾何のモデルが定義され, この 2 つのモデルが本質的に同じであることが証明されます. ユークリッド幾何学の「直線」に相当する「測地線」といった双曲幾何の様々な性質についても調べていきます. 3 章ではさらに, 双曲面モデルというものを導入し, やはりこれが前出の 2 つのモデルと本質的に同じモデルであることが示されます. 最後となる 4 章では, 双曲面のタイル張りという話題が, 多くの図とともに解説されています.

セミナーでは 1, 2 章を中心に読み, 余裕があれば 3 章以降を読むことになると思います. 上にも述べた群と作用という考え方を身につけながら,「幾何学」とは何か?ということを考えることができるのではないでしょうか.

予備知識は, 高校程度の極限・微積分です. また, 複素数や行列に慣れているのが望ましいです. 3 章までいくと, 線形代数も使われます.

4　ガロア理論講義 - 足立恒雄

■難易度の目安 ☆☆

これを読んでいる皆さんなら, 中学校で習う 2 次方程式の解の公式はよく知っていることでしょう. そして, 中には 3 次方程式の解の公式を知っている方もいることでしょう. では, 4 次方程式の解の公式はどうか?何次方程式の解の公式まで存在するのだろうか?答えを先に言ってしまえば, 4 次方程式の解の公式までが存在していて, 5 次以上の方程式の解は方程式の係数の四則演算と冪根で一般には表せないことが知られています. このような明快な答えを与えたのが, 本書で扱うガロア理論です. ガロア理論を学ぶにあたっては, 群や体といった代数系と, それらの間の代数的構造を保つような写像とを扱って行くことになります. 具体的に体の拡大の例を挙げると, たとえば体に対してその体

を含むより大きな体を考える, 体の拡大と呼ばれる操作があります. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ に対し, $\sqrt{2}$ を加えて, しかも加減乗除について閉じているようにした体 $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x+\sqrt{2}y|x, y \in \mathbb{Q}\}$ を作る操作が体の拡大の一例です. 耳慣れない単語がたくさん登場してきて怯んだ人もいるでしょうが, 本書では初学者にもイメージしやすいようにというコンセプトで丁寧な説明がなされているので, 高校範囲の知識でも十分読めます. 例えば, 本書の冒頭第 1 章では、いきなり代数系の抽象的な話に入るのではなく, 「ギリシャの 3 大作図不能問題」(ある円が与えられて, それと同面積の正方形はコンパスと定規で書けない, などなど) から問題を提起して, ガロア理論の理解のカギとなる体の拡大や拡大次数についての導入がなされており, 第 2, 3, 4 章での厳密ですが抽象的でイメージしづらい定義の上での議論を理解する上での大きな助けとなっています. 第 5 章においては, それまで積み上げてきた「前準備」を全て組み立てて, 有理数全体の集合 Q から, 体の拡大の中間体がガロア群の部分群と一対一対応するという大定理の証明へとまとめあげていきます. 実は筆者も高校時代ガロア理論を夏季セミナーで学んだ一人なのですが, それまで意味が分からなかったものが意味のある議論にまとめあげられていくこの過程にエキサイトしました. 本セミナーにおいては, 第 6 章にある 5 次方程式の解の公式の非存在性の証明を大目標として進めていきますが, もし進度に余裕があれば, 正 n 角形が定規とコンパスで作図可能な時の n の必要十分条件など, ガロア理論を応用したさまざまな定理を「おまけ」として扱う可能性もあります. この本を始め, 夏季セミナーの本の中には普通全章終わらせることを目標としていないものも少なくないのですが, 持ち帰ってから期間中に扱えなかった章を読んで楽しむという点においても, よい一冊だと思います. また, この本のもう一つの特徴として, 演習問題と簡単な解説が載っているということも挙げられます. ですので, 自分で考えながら内容を理解していく癖をつけるいい練習にもなるかもしれません. さらに, 代数の基本的なところから丁寧に解説がしてあり, 初学者にも分かるようなものですので, 予備知識については中学校で習う集合の話程度が分かっていれば, チューターの説明で十分補えると思います. 興味を持っていただいた皆さん, お待ちしております.

5　物理現象のフーリエ解析 - 小出 昭一郎

■難易度の目安 ☆☆

フーリエ解析とは, 複雑な関数を周波数毎の成分に分解することで, 扱いやすい形の関数で記述し直す手法です. たとえば, 楽器は空気に特定の形の振動 (時刻 t の関数) を与えることで音を発しますが, この振動はフーリエ変換によっていくつかの正弦波の重ね合わせに分解することができます. 分解によって得られた成分は, どのような周波数の波がどれくらいの大きさで含まれているのかという情報 (周波数 k の関数) を表現するものとなります. とくに, ヒトの耳, 脳はこの変換に相当する処理を行うことで, 楽音の高さや音色を知覚しているといわれます. このように, 自然界に見られる時間領域の関数には, 周波数領域の関数として表現し直すことで, 特徴を捉えやすくなったり解析がしやすくなったりするという例が多々あります.

フランスの数学者 J. B. J. Fourier($1768 \sim 1830$) は, 微分方程式を解くための手段として, 周期関数を三角関数の無限級数で表すフーリエ級数展開を考案しました. さらに, これを周期関数から非周期関数の場合に拡張したものはフーリエ変換と呼ばれ, 関数 $f(x)$ のフーリエ変換は次のように表さ

れます：

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x.$$

このようにして定義される関数 $F(k)$ は一般に複素関数であり, 元の関数 $f(x)$ に含まれる波数 k の周波数成分の振幅と位相を表します.

本書では, 第 1 章でフーリエ級数を導入し, 第 2 章で多次元のフーリエ変換に拡張します. 第 3 章以降では, 実際にフーリエ級数やフーリエ変換を利用して, 様々な形の微分方程式を解いていきます. 定理を提示し証明するという数学書の基本的な形式に則った本ではなく, 具体例として多くの物理現象を扱うことで, フーリエ解析を 1 つの幅広い手法として身に付けることが期待できる本となっています. そのためフーリエ変換の数学的な性質に深く踏み込むことはしていませんが, 数学書に馴染みのない人にも読み進めやすい構成であるともいえるでしょう.

予備知識としては, 微積分の基礎 (高校範囲程度, 主に指数や三角関数の微積分) と複素数を仮定します. また, 高校物理で習う範囲の振動や熱伝導, 電気回路, 光の干渉などについての知識があれば, 本書をより楽しむことができると思います.

6　離散幾何学講義 - J. マトウシェク (著)　岡本吉央 (訳)

■難易度の目安 ☆☆

離散幾何学とは, おもに (有限個の) 点, 直線, 平面, 円, あるいは凸集合といった図形の性質を調べる学問です. ただし図形の性質といっても, その「幾何的」な性質 (たとえば長さ, 角度, 位相など) というよりは, むしろ「組合せ的」な性質を中心に調べる学問です.

たとえば, Helly の定理というものがあります. これは「平面上の有限個の凸集合に対して, どの 3 つを取っても共通部分が空でないなら全ての共通部分も空でない」という定理です. なお, これは 2 次元に限らず 3 次元, さらには高次元に拡張しても成り立ちます.

本書は, 離散幾何の教科書として書かれた本です. 基本的な概念の説明に始まり, 凸集合の交わりに関する性質, 点や直線や平面, 超平面の配置についての問題, 高次元凸図形の振る舞いなど, 重要でかつ興味深いいくつかのトピックが精選されており, それぞれについて豊富な内容が扱われています. その中には, 計算機科学など情報の分野とかかわりの深い話題も含まれます. また, 本書には説明を補足する図が多く載っており, 取っ付きやすく感じることでしょう. セミナーでは一つトピックを選び, そのトピックに関連する章を順に拾い読みしていくことになると思います.

要求される予備知識についてですが, 高校で扱われる程度のベクトルの概念を知っていれば恐らく問題ありません. 線型代数や微積分の初歩が要求されることがありますが, セミナー中に十分フォローできるのではないかと思います.

7　超幾何関数 - 原岡喜重

■難易度の目安 ☆☆☆

高校ではまず多項式, 有理関数といった関数を習い, 次いで指数関数, 対数関数, 三角関数などを習います. これらをまとめて初等関数と言いますが, 後の 3 つは代数関数ではない, つまり関数を $y = f(x)$ とするとき x と y の多項式からなる関数方程式を満たさないという点において「難しい」関数であり, 微分や積分といった解析的な手段を通じて初めてよく理解される関数だと考えられます. これをさらに推し進めて初等関数以外の重要な関数 (特殊関数と呼ばれる) を調べるとき最も基本的なのが超幾何関数です.

Gauss の超幾何関数は冪級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} x^n$$

(ただし $(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$) により定義されます. 超幾何関数という名称はこの冪級数が $\alpha = \beta = \gamma = 1$ という特殊な場合に幾何級数 (等比級数) を含むことによっています. この級数自体は単位円板内でしか収束しませんが, 少し調べると $y = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ は次のような 2 階の線型常微分方程式

$$x(1-x)y'' + \big(\gamma - (\alpha+\beta+1)x\big)y' - \alpha\beta y = 0$$

を満たすことがわかります. この微分方程式の解として超幾何関数を再定義することで上で級数により定義された関数の定義域を単位円板の外まで広げることができます (解析接続といいます) . これによってもともと冪級数という局所的な対象により定義されたものが複素平面上の多価関数として大きく広がり, その大域的な振舞いを調べることができるようになりますが, そこで活躍するのが次の積分表示です :

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta} dt.$$

このように超幾何関数は級数表示, 微分方程式, 積分表示という 3 つの顔を持っており, これらを渡り歩くことで超幾何関数の大域的な挙動を完璧に記述することができます (これができる関数は他にはほとんどありません) . ここまでがこの本の前半の内容ですが, ここで超幾何関数は奇跡的に「よくわかる」良い関数だと思えるようになります. したがってこの関数の仲間をさらに探したくなるのは自然ですが, この本の後半でもまた上の 3 つの顔を手掛かりに新たな関数を探していくことになります.

超幾何関数は単に複素関数論や微分方程式論の興味深い対象であるだけでなく, 数学の様々な分野 (保型関数論, 超越数論, 表現論, 組合せ論, 確率論, 曲面論, ……) と深いかかわりを持つ非常に特別な関数であると言われており, この本を通じてその面白さの一端に触れてもらえればよいのではないかと思います.

予備知識についてですが, 基本的な微積分 (Taylor 展開や広義積分によるガンマ関数の定義, 簡単な多変数の微積分など) や線型代数 (線型結合や基底など) に加え, 複素解析について軽く (複素積分や一致の定理など) 知っておき, また群や準同型といった言葉が出てきてもそれほど抵抗を感じないようにしておくとよいでしょう. 微分形式を知っていた方が読みやすい箇所が一部ありますが必要というわけではありません.

8 Topology from the Differentiable Viewpoint - John W. Milnor

■難易度の目安 ☆☆☆

著者のミルナーは 1962 年のフィールズ賞受賞者であり, 20 世紀を代表する数学者の一人です. 彼の執筆した数学書はどれも有名ですがこの本はそのうちの幾何学入門のものです. 幾何学とは「図形」を調べる学問です. つまり, 「図形」が何かをまず決める必要がありますが, この本で考えるのは多様体とよばれるものです.

多様体とは何かを簡単に説明するために, 曲面について考えてみましょう. 曲面のなかには, 球面のように穴を持たないもの, 浮き輪やコーヒーカップ (の表面) のように 1 つの穴を持つものがあります. さらには, 穴を 100 個くらい持つ複雑な曲面もあります. このように曲面のかたちにはいろいろな可能性がありえますが, すべての曲面に共通する性質として「各点の十分近くをみると 平面とおなじ姿をしている」ということがいえます. 曲面のこの性質に注目して「各点の十分近くで n 次元ユークリッド空間とおなじ姿をしている」図形を考えることができます. 2 次元ユークリッド空間は平面に他ならないので, これは上でのべた曲面の性質を素直にとりだした概念になっているわけです. これが n 次元多様体の考え方です.

曲面の例からも想像されるように, 多様体には様々な形があり, それらの性質をうまく調べていくことになります. その際に基本的になるのが, 2 つの多様体 M, N に対して M から N への「変換」を調べることです. (「変換」をより正確に述べると, M から N への写像でよい条件を満たすものです). このとき, その様子をとらえる「写像度」という整数やその変種を考えることができます. これらの厳密な定義は簡単ではないですが, 非常に有効な概念となります.

本書は, この「写像度」を縦糸にして, 多様体の定義といった最も基本的なことからかなり高度な話題（枠付きコボルディズム）までが一気に書かれた非常に面白い本です. 多くの節において, 抽象論をしてから具体的な事柄 (例えば, 代数学の基本定理) に応用をしてみせる, という構成になっており, 楽しみながら読むことができるでしょう. セミナーで最後まで読み切ることは難しいでしょうが, 同じような議論を繰り返しつつ, より深い性質を学んでいくという流れも分かりやすいのではないかと思います.

予備知識としては線形代数と微分および位相の初歩さえ身につけていれば, (必要であればチューターの助けを借りて) 読むことができるでしょう.

9 Introduction to Analytic Number Theory - Tom M.Apostol

■難易度の目安 ☆☆☆

整数論は, 代数学, 幾何学, 解析学などの様々な手法や問題意識が交錯する数学の分野です. 本書では, 解析学を通して整数論を深めていきます (解析学とは, 極限や関数の微積分を扱う分野です).

整数論で登場する多くの概念, たとえば約数, 素因数, 素数の個数や和といった情報は, 一般には非常に不規則な挙動を示します. しかしながら, 十分大きな区間においてこれらの平均的な振る舞いを調べるとその振る舞いはより「規則的な」関数で近似されることがわかります. たとえば x を十分大きな実数としたとき,

- x 以下の正の整数について, その正の約数の個数の平均は, 約 $\log x$ である.
- x 以下の正の整数のうち, 素数の占める割合は, 約 $1/\log x$ である.
- x 以下の無作為に選んだ 2 つの正の整数が互いに素である確率は, 約 $6/\pi^2$ である.

などの結果が知られています. このように現象を大局的な視点で近似的に捉えるのが, 解析的手法の特徴です. 整数論的関数の和を取り扱うテクニックや, 関数同士の関係を学びながら, これらの問題に取り組んでいきましょう.

素数の分布を解明するには, ゼータ関数とよばれる関数を調べることが重要になります. 代表例である Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

を考えてみましょう. 正の整数全体について簡単な関数を足し合わせており, このような関数の近似的な振る舞いは, 解析的に調べやすいといえます (ただし解析接続という手法で定義域を拡張すると非常に難解になり, Riemann 予想とよばれる未解決問題に繋がることを注意しておきます). この関数は, Euler 積とよばれる等式

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \text{は素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

により, 素数と結びついています. したがって, この関数を調べることで, 「素数の個数を数える」「素数全体について簡単な関数の和を考える」など, 素数の分布に関する問題に近づくことができるのです. その一例として本書では, Riemann のゼータ関数と, その変種を考えることで,

> Dirichlet の算術級数定理 : 任意の互いに素な正の整数 a, m に対し, $p \equiv a \pmod{m}$ をみたす素数 p が無限に多く存在する.

が (より精密な評価とともに) 示されており, セミナーにおける大きな目標の 1 つとなるでしょう.

予備知識としては, 初等整数論 (素数の性質や合同式) に関する基礎知識があること, 高校レベルの微積分や極限の考え方に慣れていることを仮定します. 整数論の発展的な話題に触れてみたい生徒を歓迎します.